

JOUONS AU BILLARD !

Selon la forme du billard ...

... rectangulaire, circulaire, triangulaire, elliptique, etc..., on peut observer des **trajectoires variées** : périodiques ou denses. Pour le **billard triangulaire** (forme pourtant très simple), on dispose de résultats récents sur certains triangles et l'existence d'une trajectoire périodique dans le cas général est une **question ouverte**. Pour corser le jeu, on peut même ajouter des **obstacles** et on obtient alors de jolis résultats **démontrés encore plus récemment**. Enfin, l'étude du **billard elliptique** a permis à Roger PENROSE de trouver un contre-exemple au **problème de l'éclairage**.

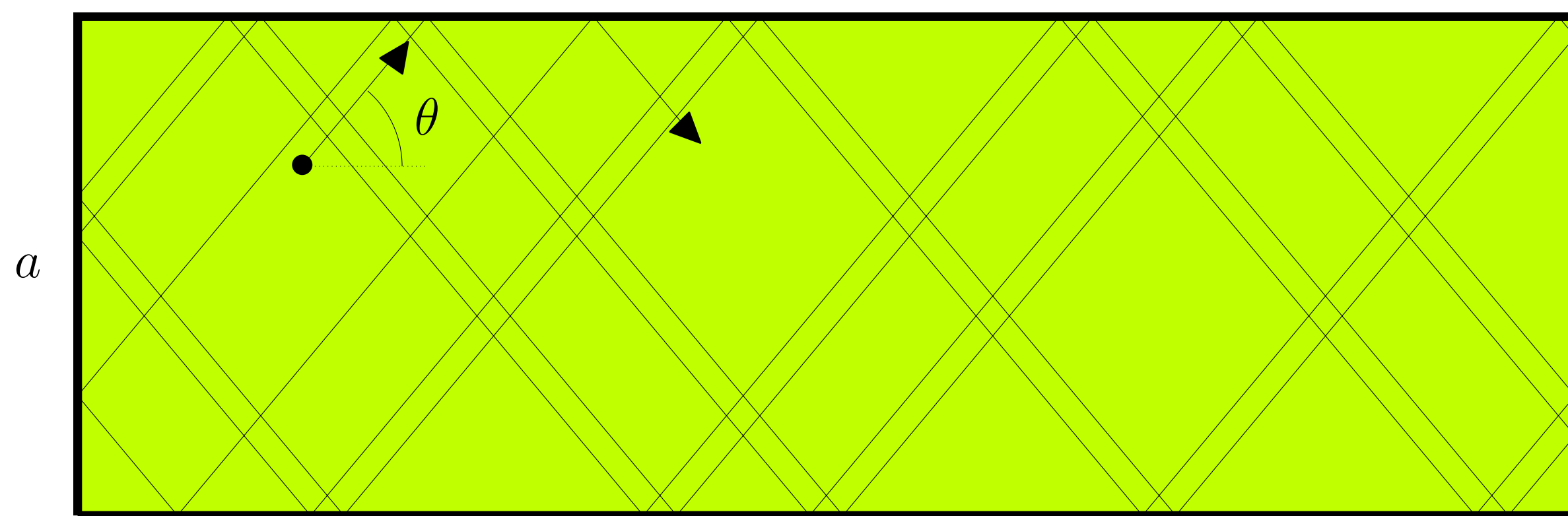
La version "classique"

On se place ici sur un billard "classique" c'est-à-dire **rectangulaire**. On suppose que les côtés sont de longueurs a et b . Dans cette configuration, certaines trajectoires sont **périodiques** et d'autres sont **"denses"**, c'est-à-dire qu'elles remplissent **presque** toute la surface de la table de billard.

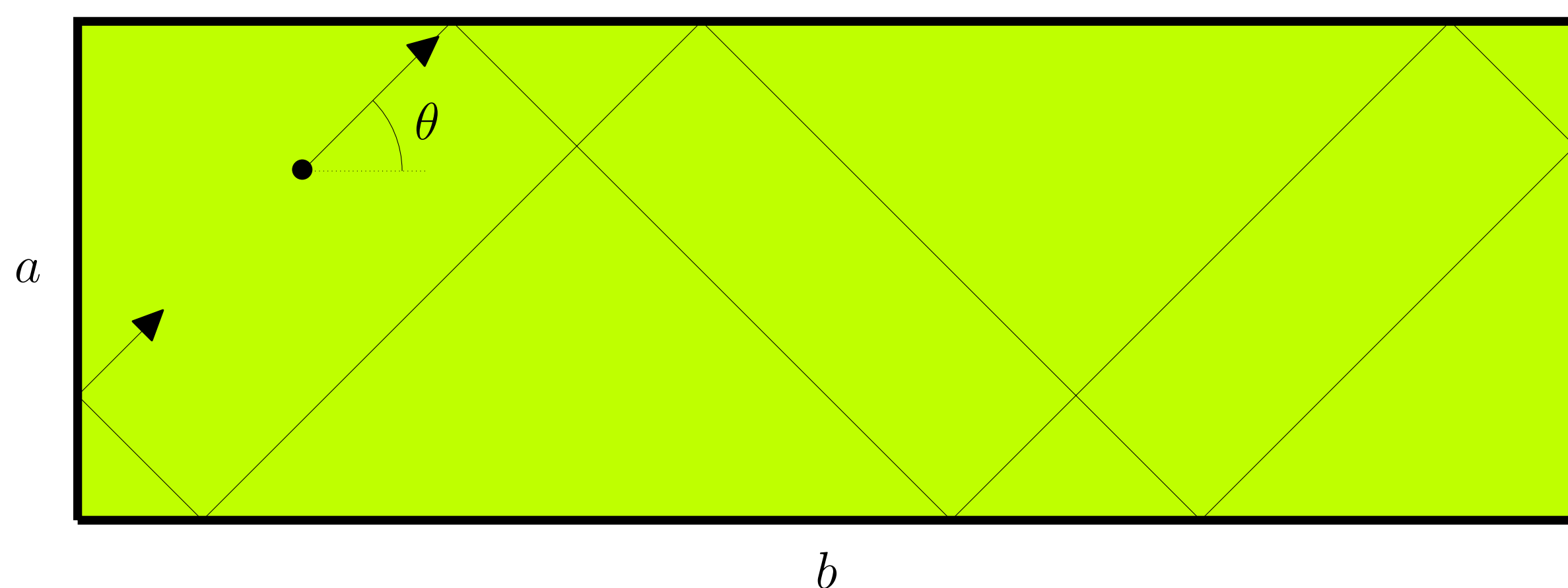
Si on appelle θ l'angle initial formé par le premier segment de la trajectoire et le bord horizontal, alors la trajectoire est périodique si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ou s'il existe $k \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\tan \theta = k \cdot \frac{b}{a}$$

Trajectoire non périodique



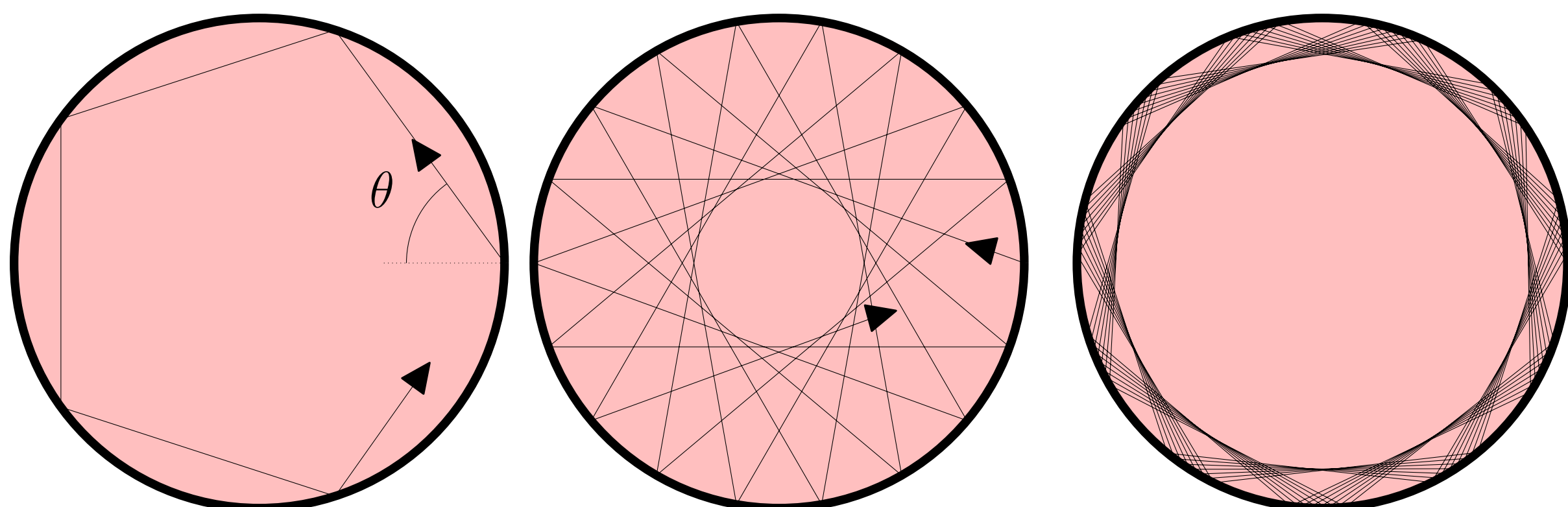
Trajectoire périodique



Billard circulaire

Sur un billard circulaire, on peut aussi observer diverses trajectoires, périodiques ou non. Dans les deux situations, on observe une **zone dans laquelle la boule ne passe jamais** : elle reste dans une **couronne**. Une trajectoire est périodique si et seulement si

$$\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$



Trajectoire périodique

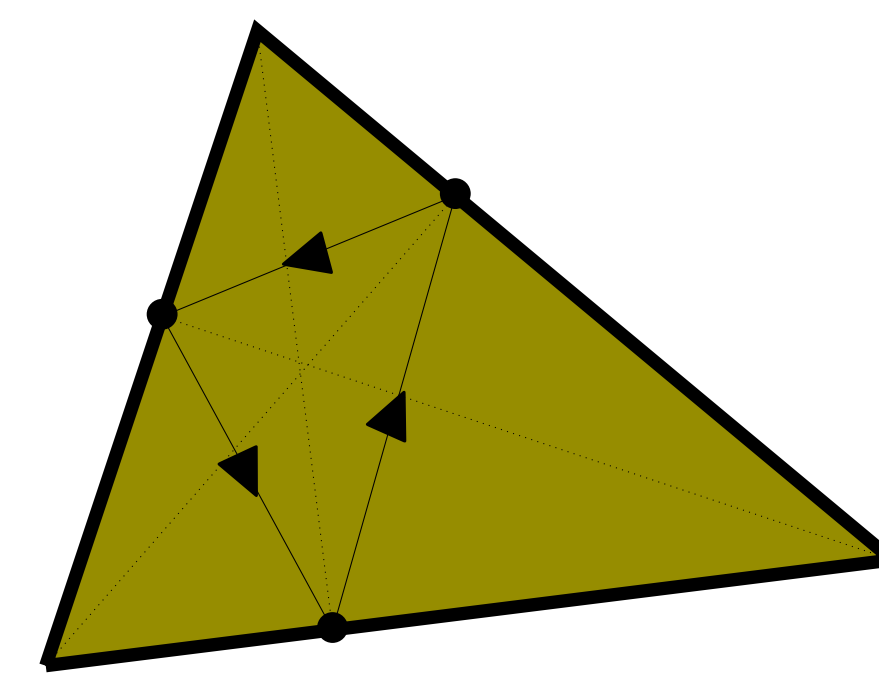
Trajectoire périodique

Trajectoire non périodique

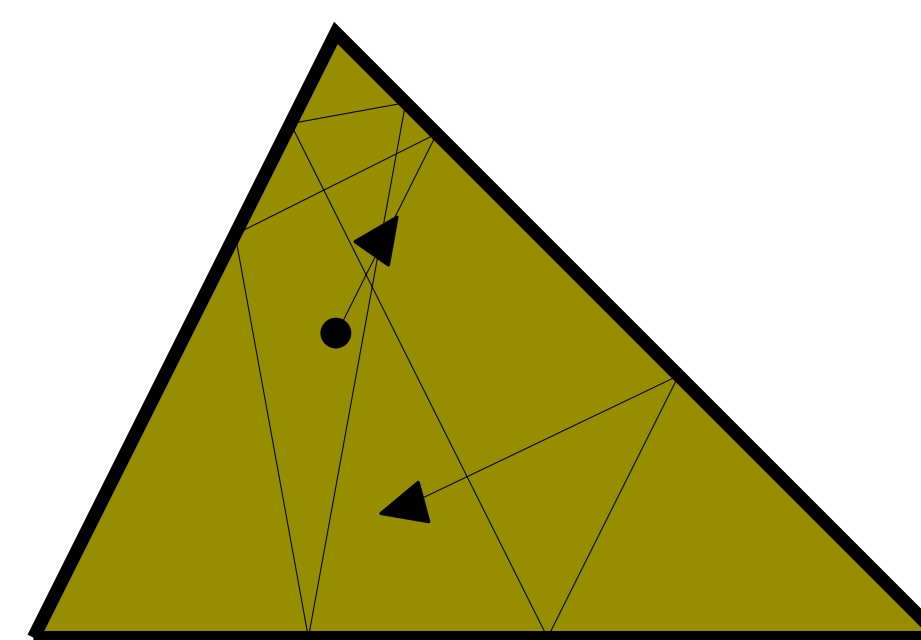
Une zone ne peut pas être atteinte...

Billard triangulaire

- Si le triangle est **aigu**, alors **il existe au moins une trajectoire périodique**. L'une d'elles passe par les pieds des hauteurs.
- Si le triangle est **obtus** et si tous ses angles ont une mesure ≤ 100 degrés, alors, **il existe au moins une trajectoire périodique** et ce résultat a été démontré par SCHWARTZ et HOOPER en 2007 !



Trajectoire périodique



Trajectoire non périodique

Des résultats récents

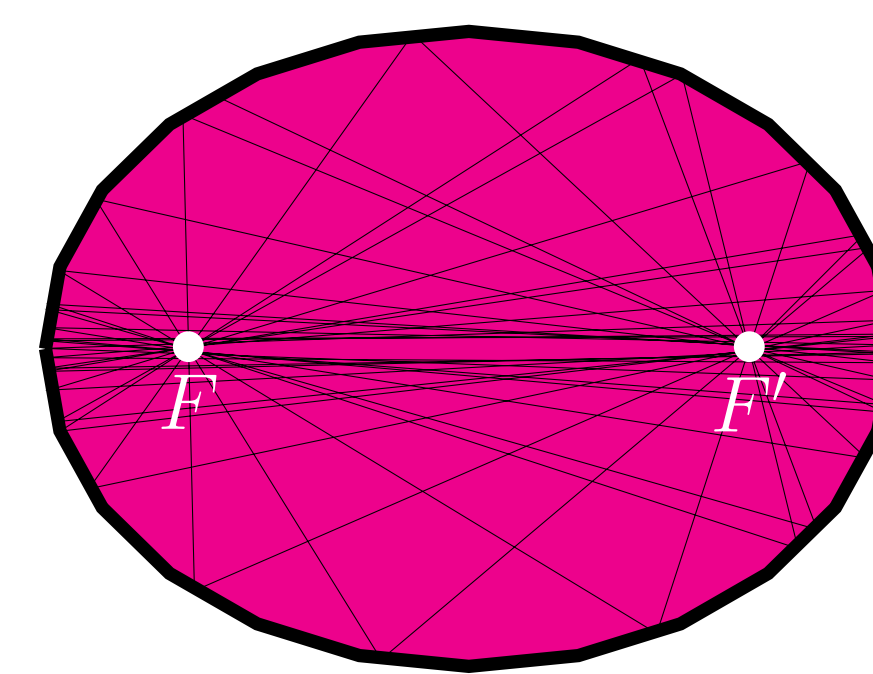
- Pour les autres triangles, c'est une **question ouverte** de savoir s'il est possible de trouver une trajectoire périodique.

Une question ouverte

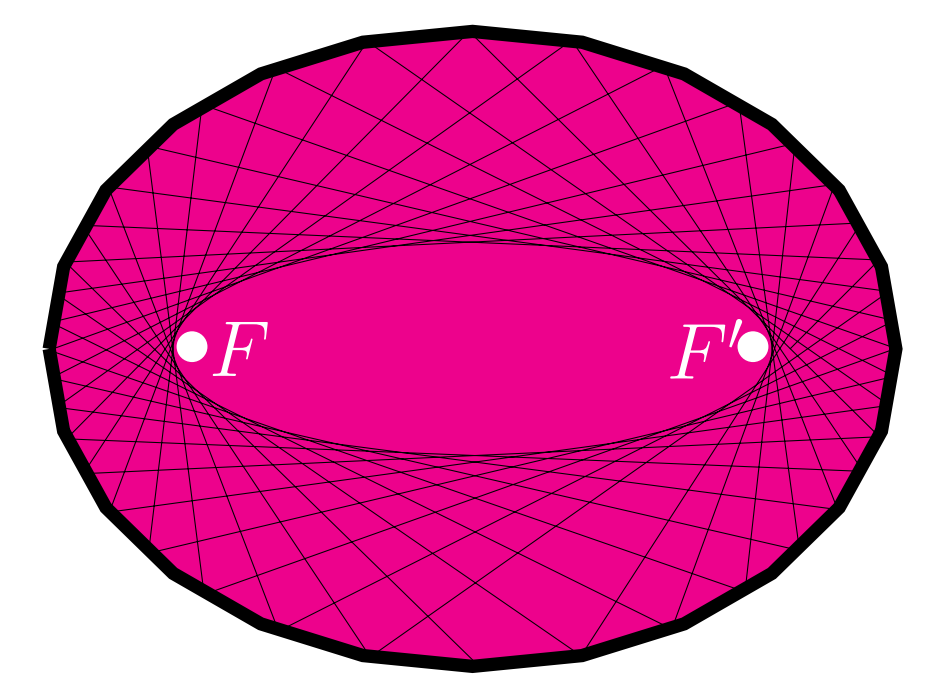
Billard elliptique

Si F et F' sont deux points du plan (qu'on appellera **foyers**), si a est tel que $FF' < 2a$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est une **ellipse**. L'ellipse possède une propriété **géométrique remarquable** :

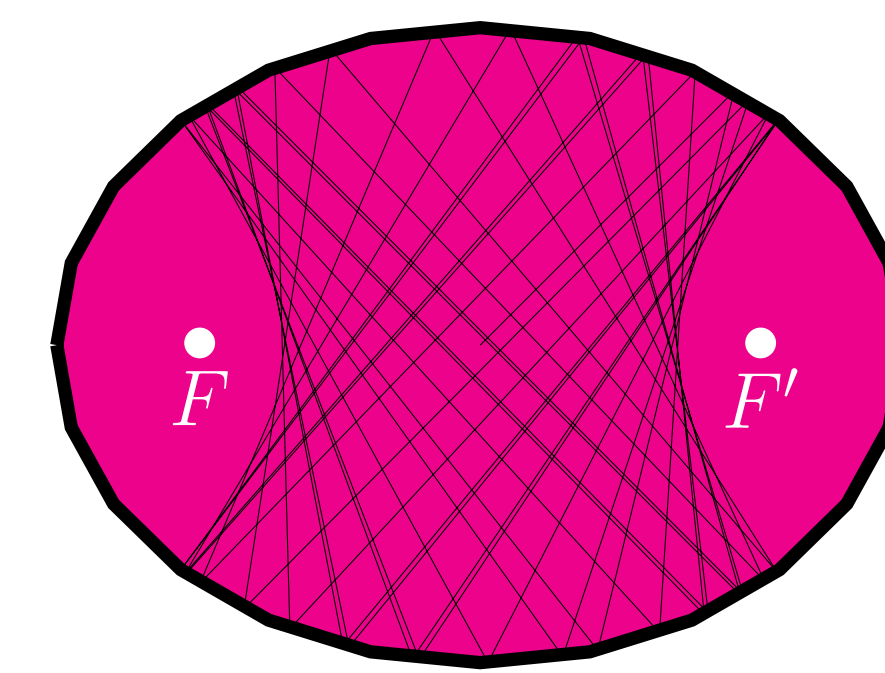
- si la trajectoire d'une boule de billard passe par F ou F' , alors, elle passe par F ou F' à chaque **rebond**. **Cas ①**
- si la trajectoire d'une boule de billard coupe la droite (FF') en dehors du segment $[F, F']$, alors, la trajectoire de la boule **ne coupera jamais le segment** $[F, F']$. **Cas ②**
- si la trajectoire d'une boule de billard coupe la droite (FF') en coupant le segment $[F, F']$, alors, la trajectoire de la boule **coupera le segment** $[F, F']$ à **chaque rebond**. **Cas ③**



①



②



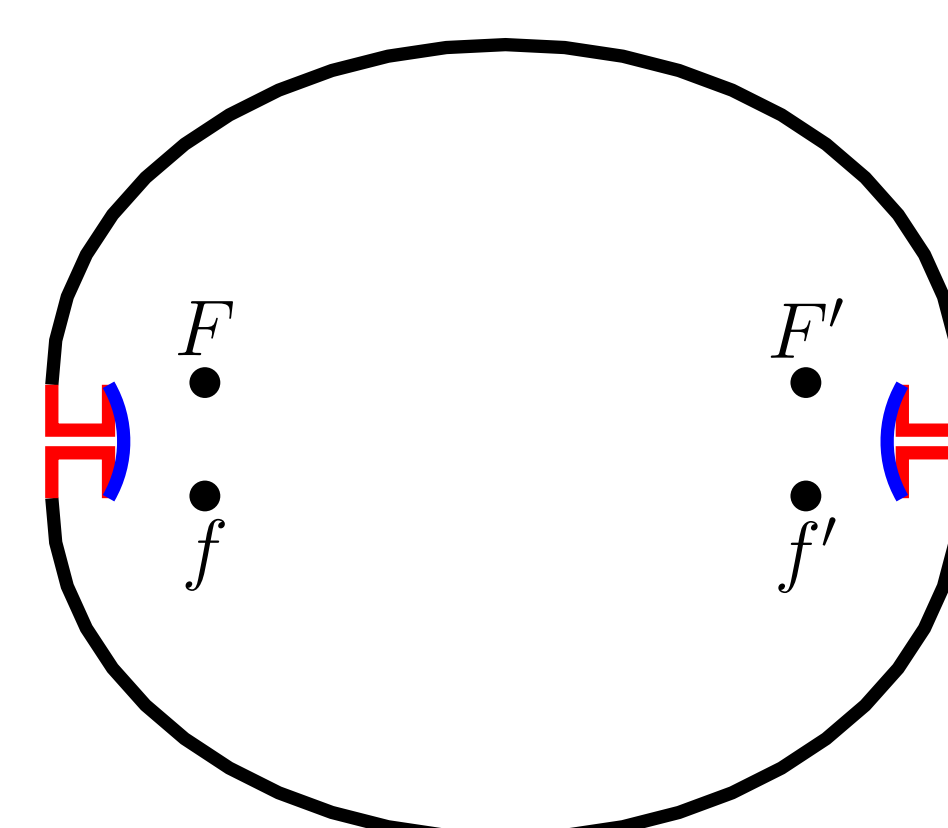
③

Comme pour le cercle, une zone ne peut pas être atteinte

Problème de l'éclairage ...

... est un problème mathématique posé en 1950 par le mathématicien Ernst STRAUS. La question est de savoir, si, dans une **pièce** dont les **murs sont tapissés de miroirs**, il est possible qu'une **seule source lumineuse** suffise à **éclairer** toute la pièce. Le problème a été partiellement résolu en 1958 par Roger PENROSE qui trouva un contre-exemple. Pour le trouver, il s'est aidé du billard elliptique. Par la suite, d'autres mathématiciens ont trouvé d'autres contre-exemples de pièces de **formes polygonales**. Le plus petit polygone trouvé, l'a été en 1997 et a 24 côtés.

Le contre-exemple de PENROSE est constitué de deux demi-ellipses qui sont connectées via des segments verticaux.



Dans cette pièce, il n'est **pas possible**, à l'aide d'une **seule source lumineuse** qui éclaire dans toutes les directions et dont les rayons se réfléchissent sur les murs, d'éclairer toute la pièce.