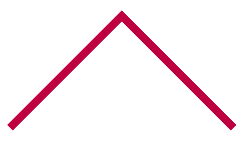
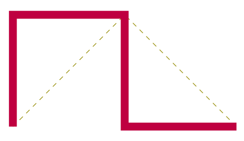
La courbe du dragon

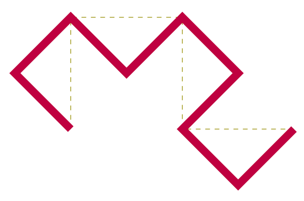
Définition

Cela ressemble au flocon de Von Koch

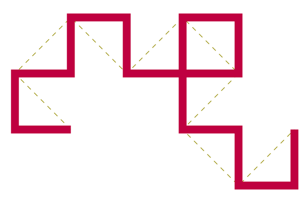
- Construisons un triangle rectangle isocèle : 
- Sur chacun de ces segments, on construit à nouveau un triangle isocèle mais de sens contraire et on obtient donc suite à cette **2e** itération :



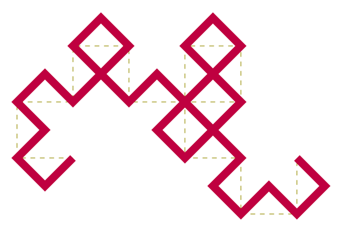
- On répète l'opération : on construit sur chaque segment un triangle rectangle isocèle en alternant les sens. On obtient après cette **3e** itération :



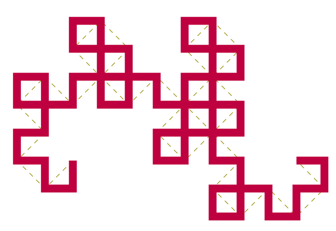
- En répétant, on obtient la **4e** itérée :



- La **5e** :



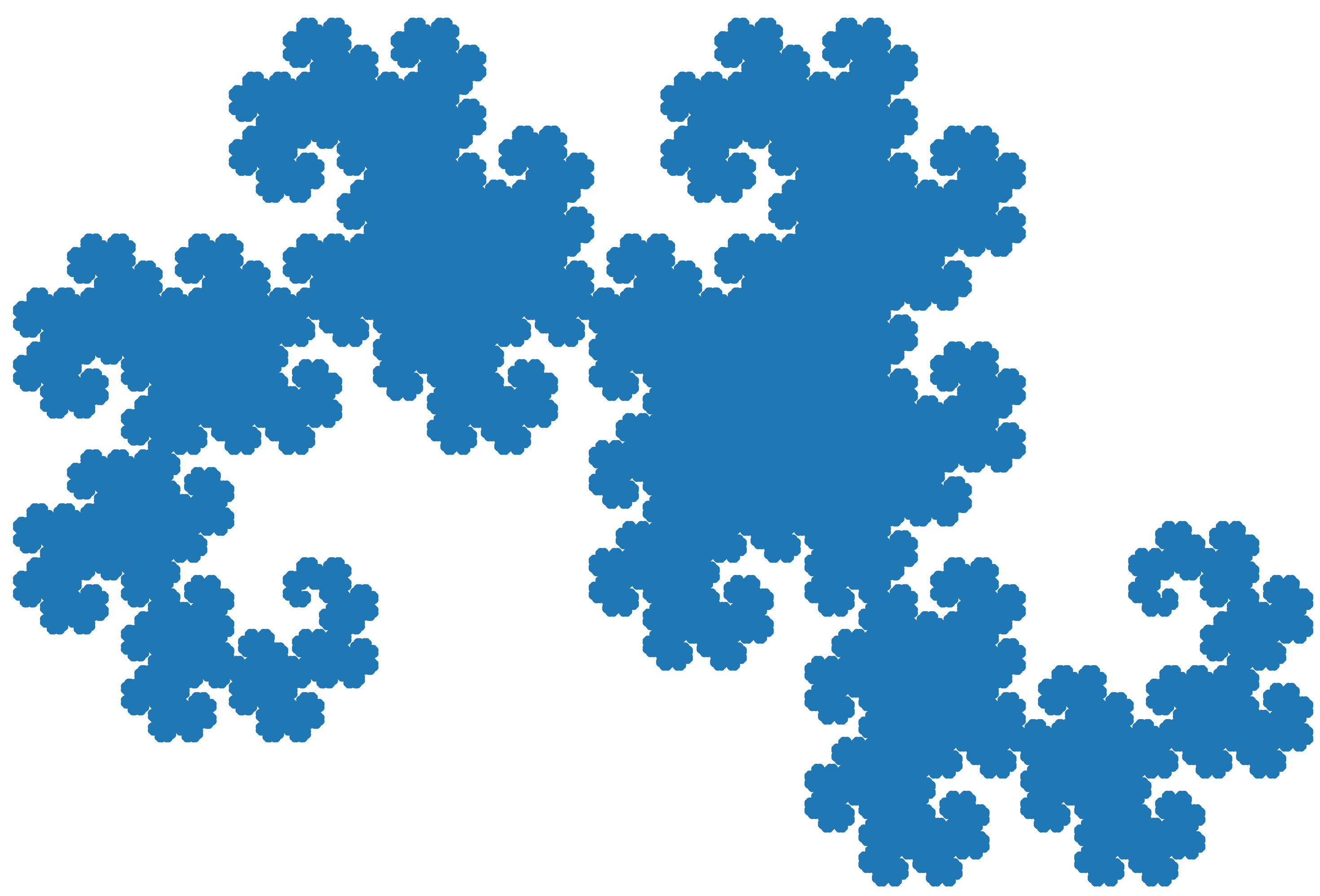
- La **6e** :



Représentation

Cela ressemble à un dragon

On obtient la figure limite suivante, appelée courbe du dragon. C'est une courbe **continue** qui **ne se traverse jamais** (en revanche, elle forme des boucles). Sa frontière a une longueur **infinie** et sa surface est de $1/2$.



Les origines

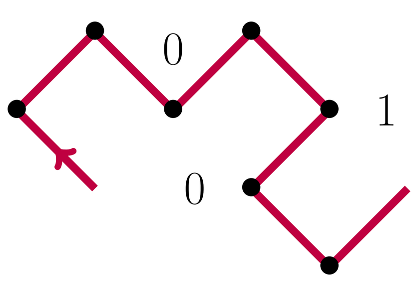
Cette courbe a été inventée dans les années **1960** par trois jeunes **physiciens** de la Nasa, John Heighway (né en 1947), Bruce Banks (né en 1942) et William Harter (né en 1943), puis a été popularisée par Martin Gardner dans sa rubrique de jeux mathématiques du Scientific American en 1967.

La suite du dragon

Il s'agit d'une **suite de mots** formés de 0 et de 1. On pose $u_1 = 1$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n 1 \overline{u_n}$ où $\overline{u_n}$ est obtenue à partir de u_n en le parcourant à l'envers et en transformant les 0 en 1 et les 1 en 0.
Ainsi, les premiers termes sont :

$$u_2 = 110, \ u_3 = \underbrace{110}_{u_2}1100, \ u_4 = \underbrace{1101100}_{u_3}11100100$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un codage en binaire de la $n$ième itérée. On lit u_n de la façon suivante : partant de $(0,0)$ dans une direction donnée, on trace le premier segment de la courbe, puis, si on lit un 1 on effectue un virage à droite à angle droit et sinon un virage à gauche à angle droit.
Ainsi, en lisant u_3 qui est **1101100**, on retrouve bien la 3e itérée :



Avec les complexes

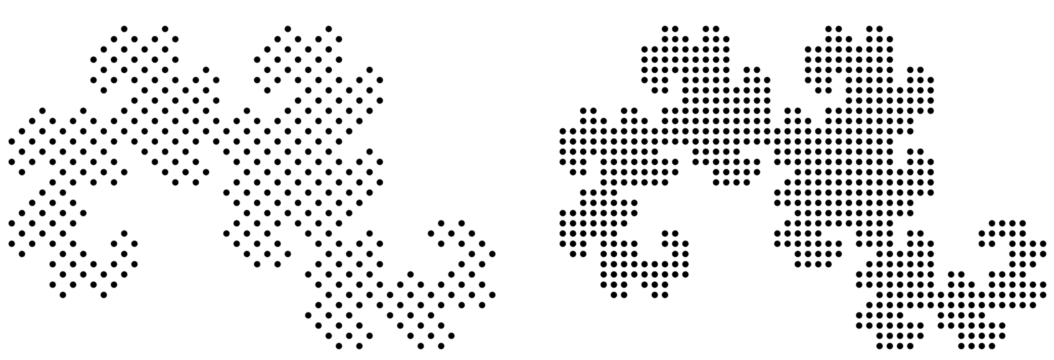
On définit

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1+i}{2} z \end{array}, \ f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 1 - \frac{1-i}{2} z \end{array} \text{ et } T_0 = \{0, 1\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

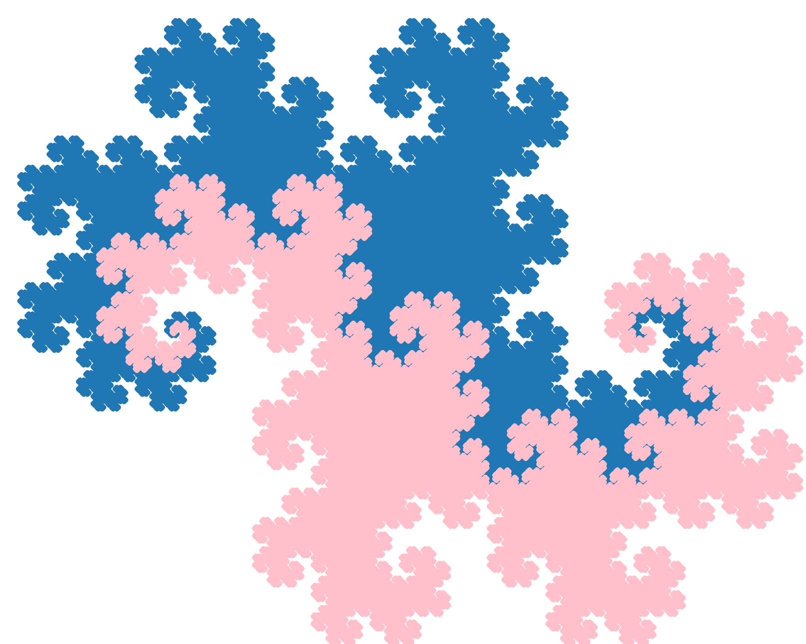
$$T_{n+1} = f_1(T_n) \cup f_2(T_n).$$

La suite (T_n) est une suite de compacts de $\mathbb{C}$ qui "converge" vers la courbe du dragon. T_n est l'ensemble des points de la ligne brisée de la $n$ième itérée de la courbe du dragon. Ici T_9 et T_{10} :



Des pavages

Il existe plusieurs façons d'accoler différentes courbes du dragon pour obtenir un pavage du plan. Par exemple, si on considère la courbe image de la courbe bleue par la symétrie centrale de centre $(1/2, 0)$, on obtient la courbe rose qui s'emboîte parfaitement avec la bleue.



Avec ces deux courbes imbriquées, par translations, on peut recouvrir le plan : on obtient ce qu'on appelle un **pavage du plan**.