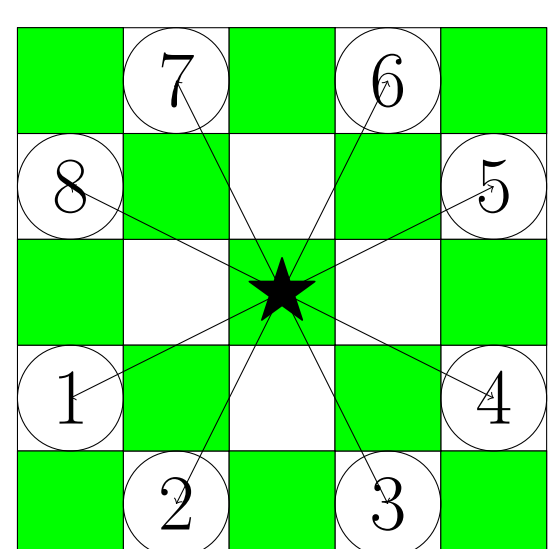


LE CAVALIER D'EULER

Définition

Partant d'un **échequier**, le problème est de savoir si on peut y déplacer un **cavalier** qui passera par chaque case exactement une fois. Ce problème a initialement été posé sur un échequier classique et a ensuite été étudié dans le cas d'échequiers de tailles et même de formes diverses. Rappelons que si le cavalier se trouve en **★**, alors, il peut se déplacer sur l'une des 8 cases visibles ici :



Lorsque le cavalier est sur un bord ou dans un coin, il a alors moins de cases accessibles.

Solutions

Sur un échequier de taille $n \times m$ avec $n \geq 5$ et $m \geq 5$, **il existe toujours au moins une solution.**

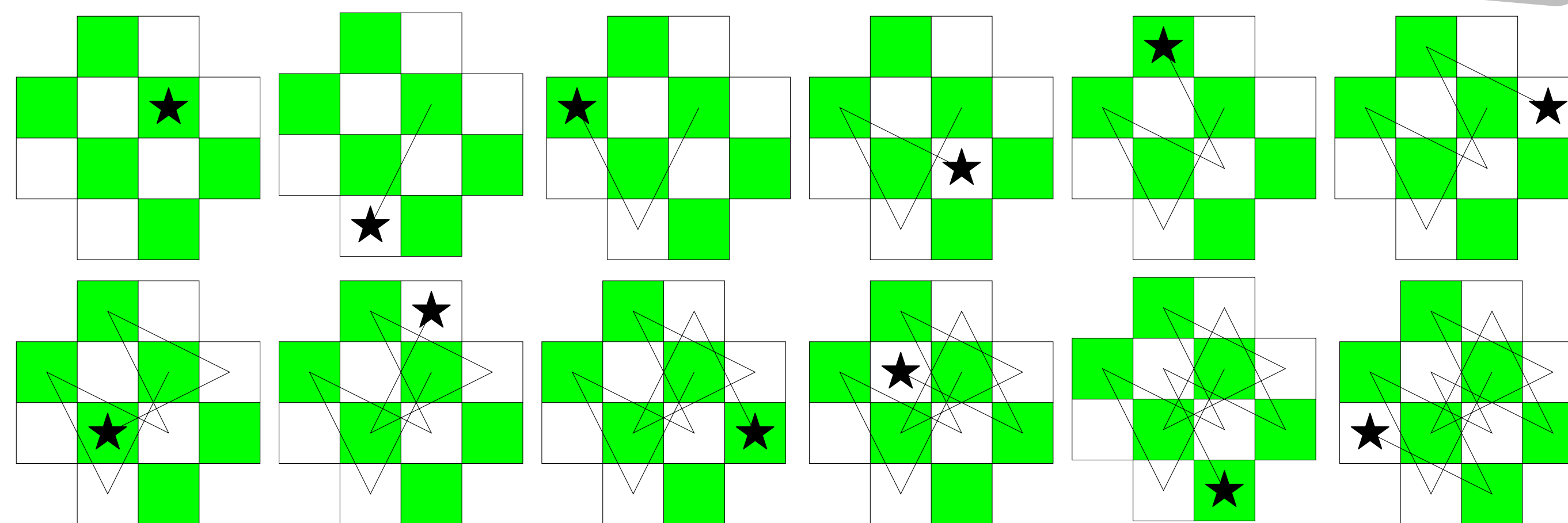
Théorème de Schwenk

Plaçons-nous sur un échequier de taille $n \times m$ avec $m \leq n$, $n \geq 2$ et $m \geq 2$. Il existe un parcours **fermé** du cavalier **sauf si au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

- m et n sont impairs
- $m = 2$ ou $m = 4$
- $m = 3$ et $n \in \{4, 6, 8\}$

Sur un échequier en croix

Un drôle d'échequier...



La particularité de ce chemin est qu'il puisse être **fermé** : de la dernière position, le cavalier peut revenir à la première position.

Heuristique de Warnsdorff

Comment trouver une solution ?

Plaçons-nous sur un échequier de taille 6×6 . Sur chaque case de l'échequier, on indique le nombre de cases accessibles depuis cette case.

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	8	6	4
3	4	6	6	4	3
2	3	4	4	3	2

Choisissons un point de départ :

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	8	6	★
3	4	6	6	4	3
2	3	4	4	3	2

Suivant l'ordre des cases possibles donné dans la définition, les valeurs des cases possibles depuis notre position sont 6, 3, 4 et 8. La méthode consiste à aller sur la case de plus petite valeur :

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	8	6	★
3	4	6	6	4	3
2	3	4	4	★	2

On met maintenant à jour les valeurs des cases en tenant compte des cases qui ont déjà été visitées :

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	7	6	★
3	4	5	5	4	3
2	3	4	4	★	2

et on continue ...

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3
4	6	8	8	6	4
4	6	8	7	6	★
3	4	★	5	4	3
2	3	4	4	★	2

Cette méthode ne donne pas une solution à tous les coups mais permet d'en trouver rapidement une dans un grand nombre de cas.

Leonhard Euler ...

... est un mathématicien et physicien **suisse** (1707 - 1783). Il a travaillé dans divers domaines des mathématiques (analyse, algèbre, théorie des graphes,...) et a donné son nom à la fonction indicatrice d'EULER définie sur \mathbb{N}^* par

$$\phi(n) = \text{Card}(\{k \in [1, n], k \wedge n = 1\})$$

Dénombrement des solutions

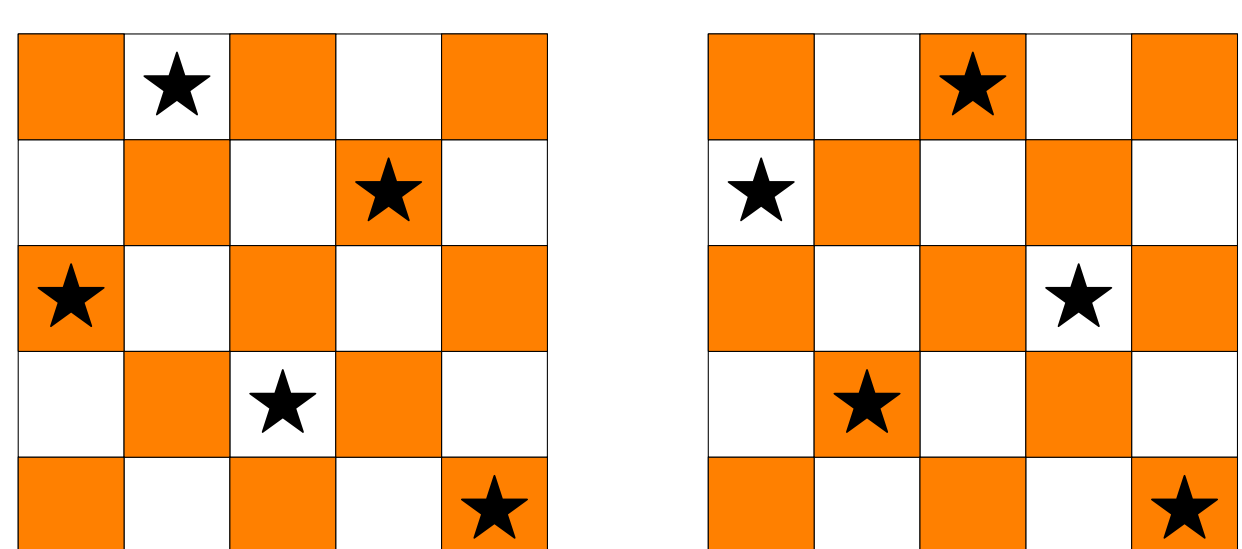
Dans le cas d'un échequier carré de taille $n \times n$, pour $n \leq 8$, on connaît le nombre de parcours :

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1728	6 637 920	165575218320	19591828170979904

Cette suite est référencée dans l'**OEIS**, elle porte le numéro **A165134**.

Problème voisin

Sur un échequier de taille $n \times n$, on cherche à placer n **dames** de telle sorte qu'aucune dame ne puisse menacer une autre dame.



Le nombre de solutions n'est connu que jusqu'à $n = 27$ et cette suite est référencée dans l'**OEIS** sous le numéro **A000170** ou **A002562** selon que l'on compte ou non les solutions symétriques.

Encyclopédie des suites d'entiers (OEIS)

L'**OEIS Online Encyclopedia of Integer Sequences** est une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique. On y trouve par exemple la suite de **FIBONACCI (A000045)** ou encore la suite des nombres de **CATALAN (A000108)**. Chaque suite dispose d'un identifiant et pour chercher une suite de la base, il suffit de rentrer sur le site ses premiers termes.

Carré magique ?

On se place ici sur un échequier carré. Plutôt que de représenter le parcours du cavalier par une ligne brisée, indiquons dans les cases de l'échequier l'ordre dans lequel les cases sont visitées. On obtient alors un carré rempli de nombres, comme par exemple ici sur cet échequier 12×12 :

1	70	107	112	5	66	103	116	9	64	99	118
108	111	2	69	104	115	6	65	100	117	10	63
71	106	109	4	113	102	67	8	61	98	119	12
110	3	72	105	68	7	114	101	120	11	62	97
73	142	35	40	77	140	17	60	93	122	13	58
36	39	74	141	32	41	92	121	16	59	96	123
143	34	37	76	139	78	55	18	125	94	57	14
38	75	144	33	42	31	126	91	56	15	124	95
81	136	29	44	79	138	19	54	89	128	21	52
28	45	80	137	30	43	90	127	20	53	88	129
135	82	47	26	133	84	49	24	131	86	51	22
46	27	134	83	48	25	132	85	50	23	130	87

Et ô magie ! Ce carré se trouve être un **carré magique** (les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales sont constantes) et c'est le plus petit carré magique qu'on puisse construire ainsi (c'est-à-dire par déplacement d'un cavalier).