La suite de Fibonacci

Définition

Une suite célèbre...

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

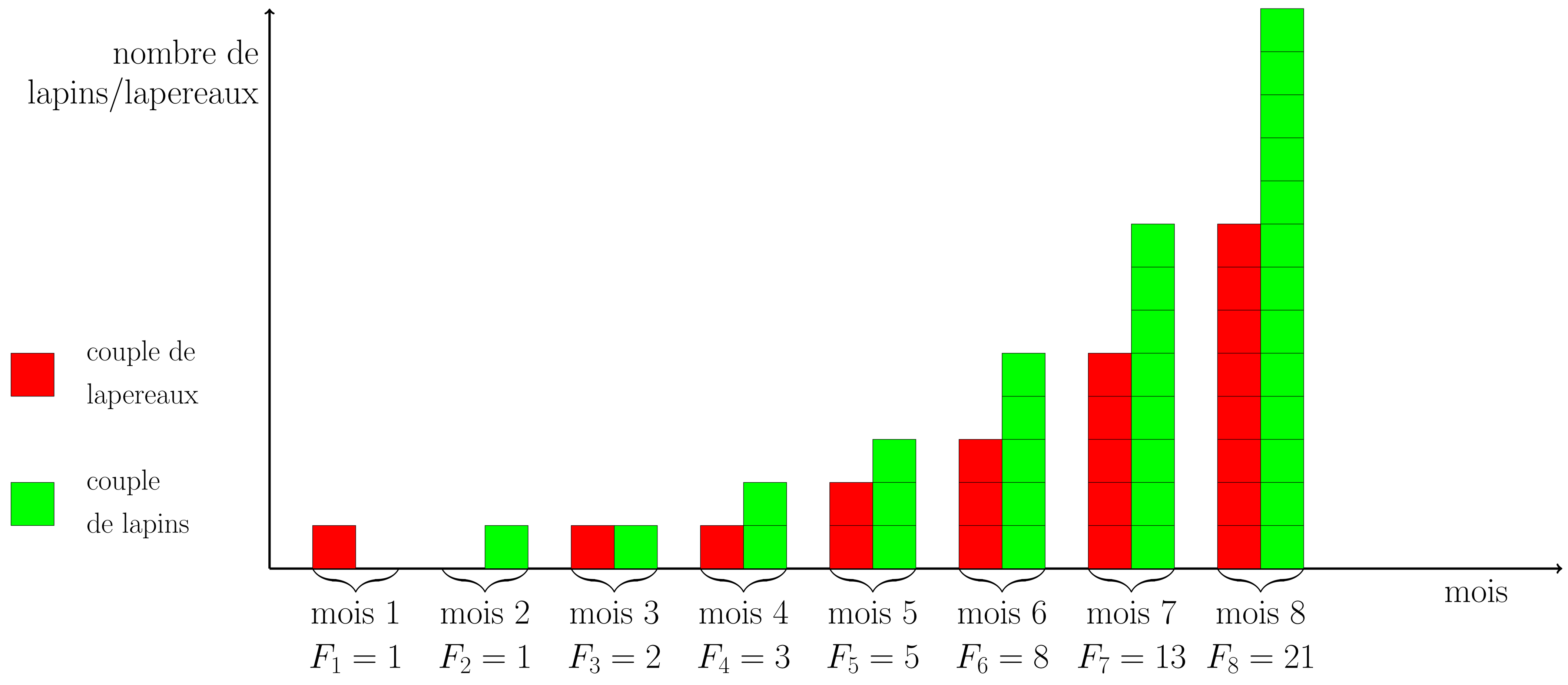
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Historiquement, le mathématicien **Léonardo Fibonacci** (1170 - 1250) a introduit cette suite pour modéliser l'évolution d'une population de lapins, F_i désignant le nombre de couples de lapins à la fin du mois i lorsqu'on fait les hypothèses suivantes :

- Le premier mois, la population de lapins est constituée d'un couple de lapereaux ($F_1 = 1$).
- Un couple de lapin ne peut se reproduire qu'à partir de l'âge de deux mois (cela implique donc que $F_2 = 1$).
- Chaque mois, chaque couple de lapins donne naissance à un couple de lapereaux (cela s'écrit $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).
- Les lapins ne meurent jamais.

Des lapins

Croissance d'une population de lapins

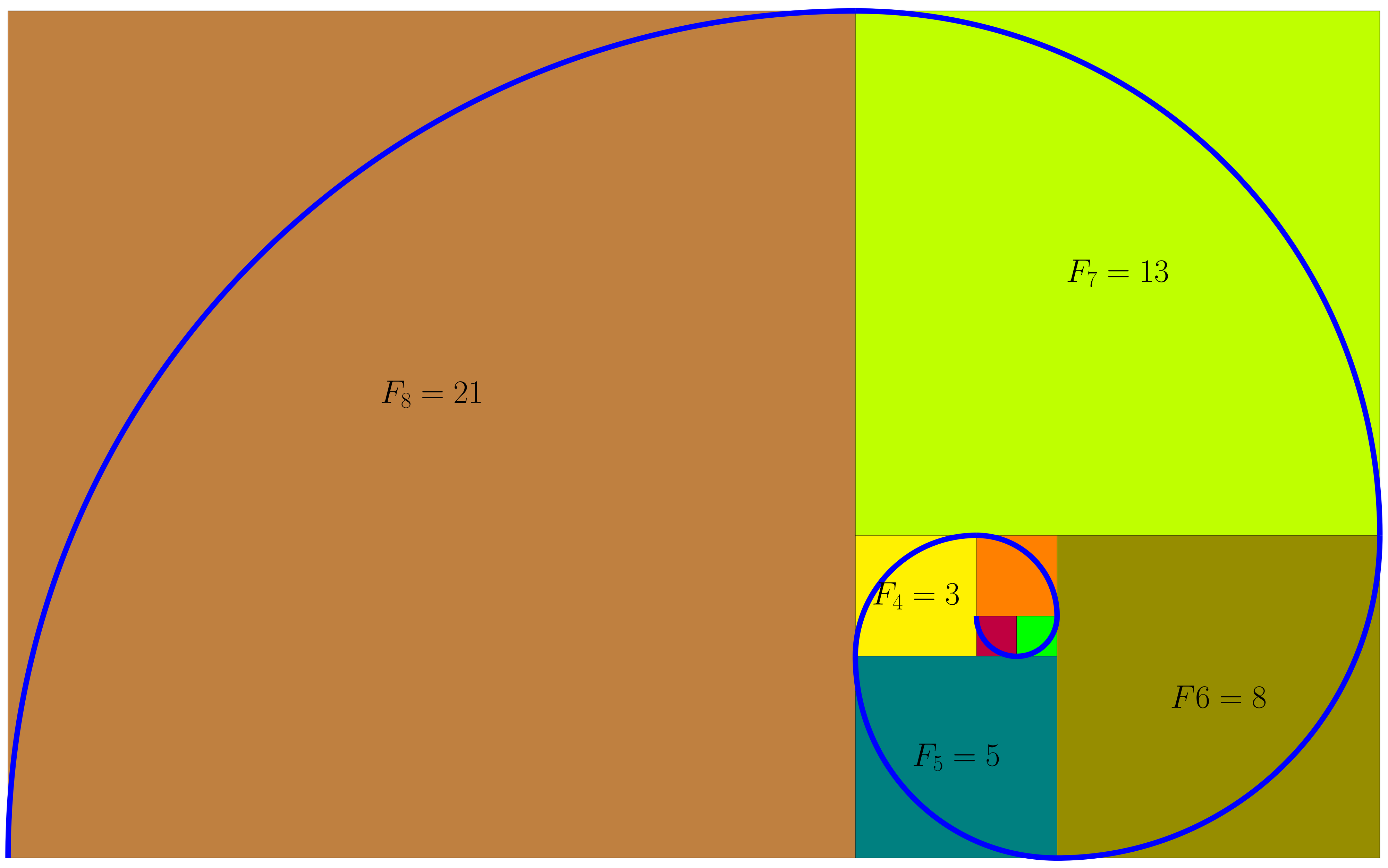


Expressions de la suite

- (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$
avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le **nombre d'or**) et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qu'on appelle le conjugué algébrique de ϕ).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$
ce qui, par calcul des puissances de la matrice $(2, 2)$, permet de retrouver l'expression précédente.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{\phi}$, on a:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k z^k = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

La spirale de Fibonacci

Une coquille d'escargot



Et le triangle de Pascal ?

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	
1	1	2	3	5	8	13	
1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

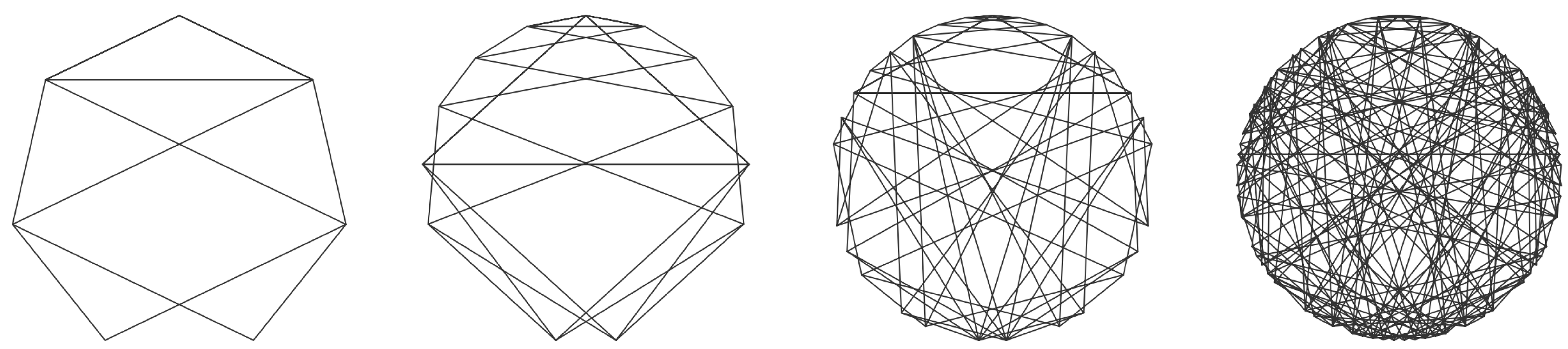
Cela s'écrit

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$$

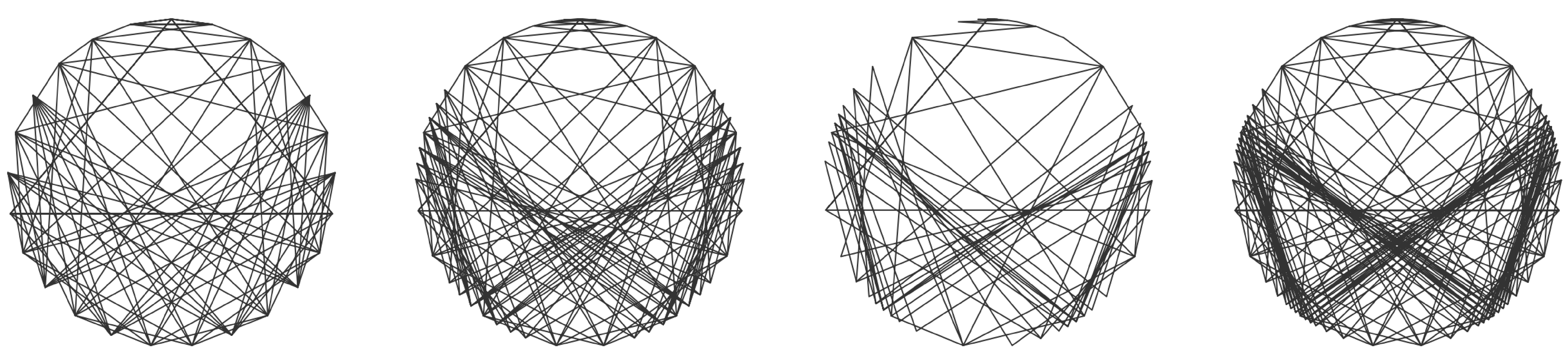
Représentation sur $\mathbb{U}$

The Farfalle Mystery !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On représente la suite de terme général $e^{2i\pi F_k/n}$ (pour k variant dans $\mathbb{N}$). Pour $n \in \{7, 17, 37, 97\}$ (n premier donc), on obtient ces figures symétriques :



Pour n de la forme $5F_k$ avec ici $k \in \{5, 7, 8, 9\}$, on obtient ces figures :



et une farfalle apparaît !