La fougère de Barnsley

Définition

On définit 4 fonctions :

$$f_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.2 & -0.36 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix} \end{array}$$

Partant du point $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on définit alors la suite aléatoire de points (A_n) par récurrence en posant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

- $A_{n+1} = f_1(A_n)$ avec probabilité 0.01,
- $A_{n+1} = f_2(A_n)$ avec probabilité 0.85,
- $A_{n+1} = f_3(A_n)$ avec probabilité 0.07,
- $A_{n+1} = f_4(A_n)$ avec probabilité 0.07.

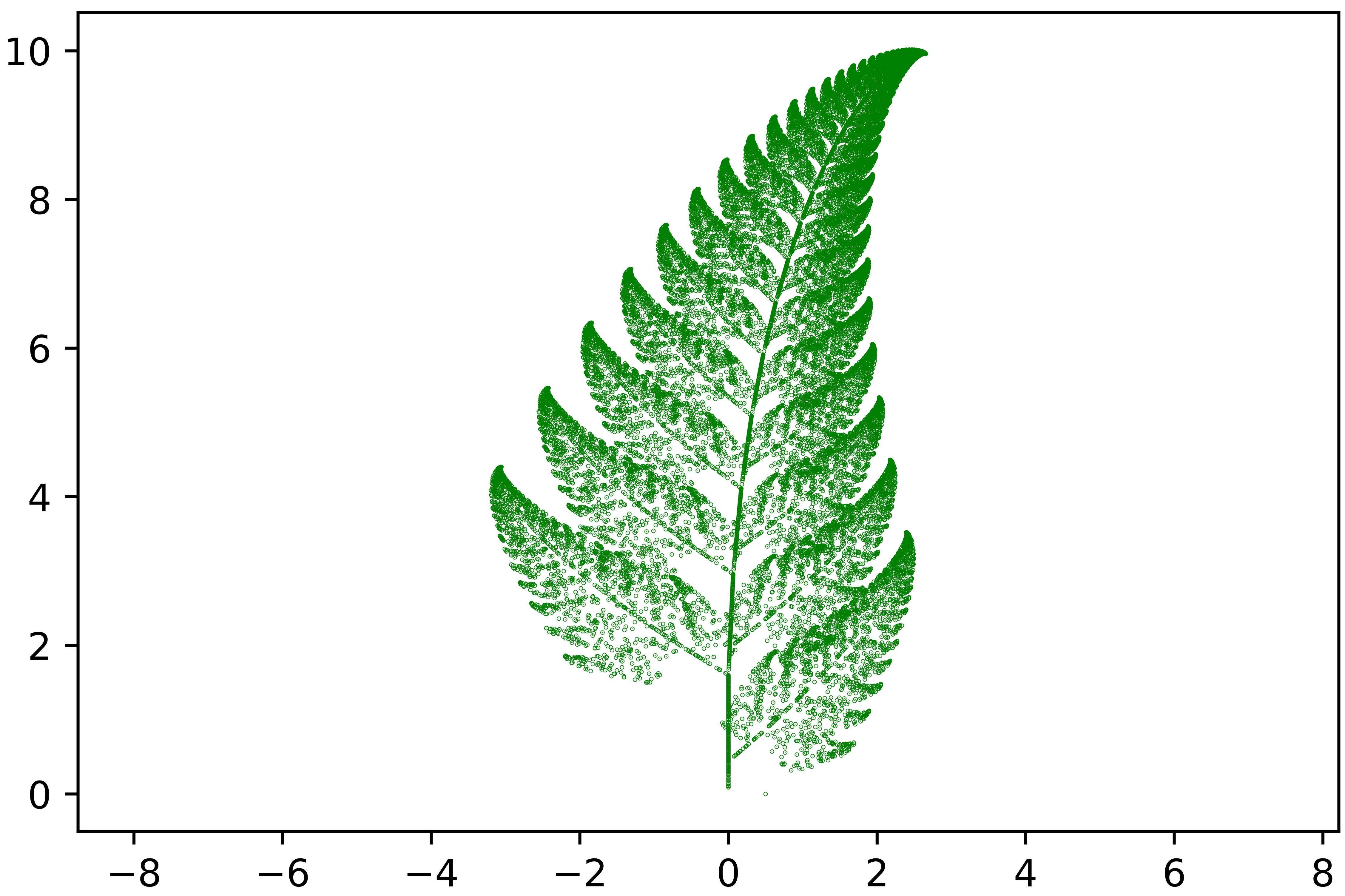
La suite des points obtenue est la **fougère de Barnsley**.

Michael Barnsley...

...est un mathématicien **britannique** (1946 -). Il a travaillé sur les fractales et a découvert cette construction de la fougère en 1993.

Représentation

On dirait une vraie !



Comment faire avec Python ?

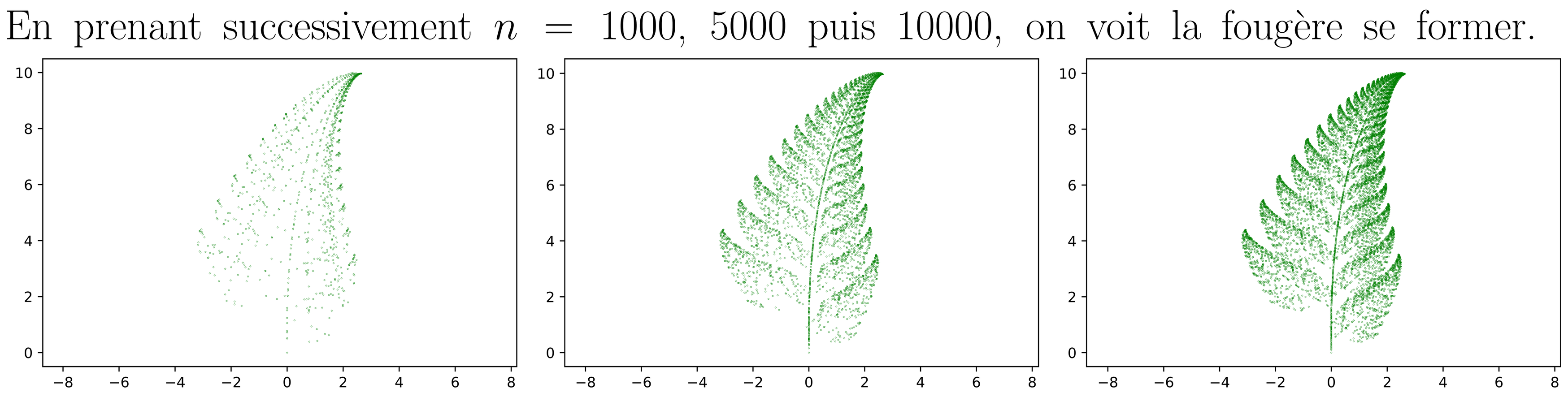
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def Barnsley(x,y,n):
    Tabx=[x]
    Taby=[y]
    for k in range(n):
        r=np.random.rand()
        if r < 0.01:
            x, y = 0, 0.16*y
        elif r < 0.86:
            x, y = 0.85*x + 0.04*y , -0.04*x + 0.85*y + 1.6
        elif r < 0.93:
            x, y = 0.2*x - 0.36*y , 0.23*x + 0.22*y + 1.6
        else:
            x, y = -0.15*x + 0.28*y, 0.26*x + 0.24*y + 0.44
        Tabx.append(x)
        Taby.append(y)
    return Tabx, Taby

x, y = 0, 0
n = 30000

Tabx2, Taby2 = Barnsley(x,y,n)
plt.figure(dpi=2400)
plt.axis('equal')
plt.scatter(Tabx2,Taby2, marker='.', s=0.1, color='green',linestyle='None')
plt.show()
```

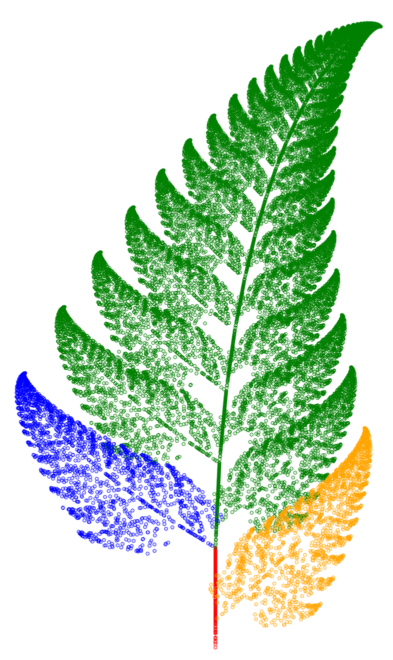
En prenant successivement $n = 1000$, 5000 puis 10000, on voit la fougère se former.



Que représentent les f_i ?

Les fonctions affines de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les $x \mapsto ax + b$

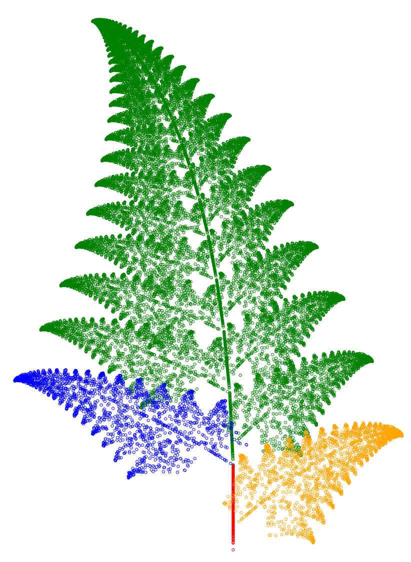
Ce sont des fonctions **affines** de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Parmi ces quatre fonctions affines, f_2 est une **similitude directe** c'est-à-dire la composée d'une **rotation** et d'une **homothétie**.
Pour voir l'effet des différentes f_i sur la fougère, on a colorié ici en **vert** les points obtenus par f_2, en **rouge** les points obtenus par f_1, en **bleu** ceux obtenus par f_3 et en **orange** ceux obtenus par f_4.

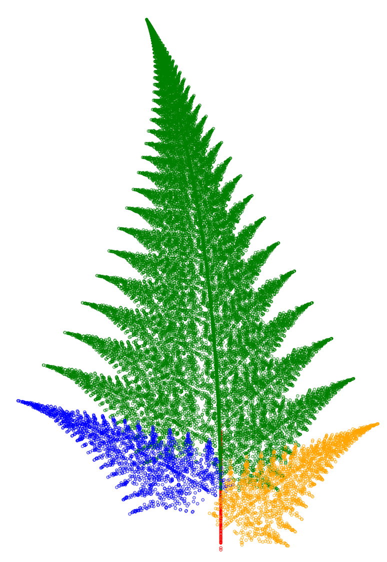


La fonction f_1 contribue à la construction de la **base de la tige**, la fonction f_3 contribue à la **feuille droite** de la base, la fonction f_4 contribue à la **feuille gauche** de la base, et enfin, par rotations et homothéties, la fonction f_2 duplique ces motifs et les reproduit pour former une fougère.

D'autres images

En faisant varier les coefficients présents dans les définitions de f_1, f_2, f_3 et f_4, on peut obtenir d'autres formes de feuilles. On peut même faire varier le nombre de fonctions et obtenir alors d'autres formes très différentes.





LaTeX TikZposter