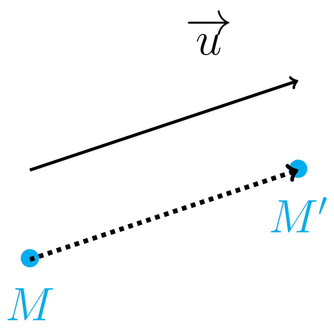
Frises

Dans le plan, il existe exactement 4 types d'isométries : les **translations**, les **rotations**, les **réflexions** et les **réflexions glissées**.

Translations (T)

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et M un point. L'image de M par la **translation de vecteur** $\vec{u}$ est le point M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On le note $t_{\vec{u}}(M)$.

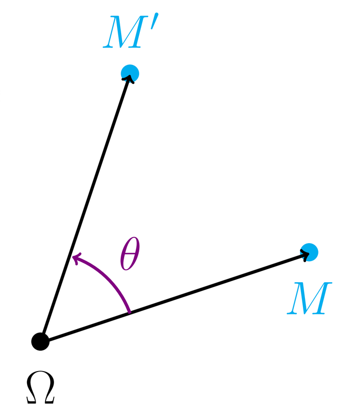


Rotations (ROT)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et Ω un point du plan. Soit M un point du plan. L'image de M par la **rotation de centre** Ω et **d'angle de mesure** θ est le point M' vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

On le note $r_{\Omega,\theta}(M)$.



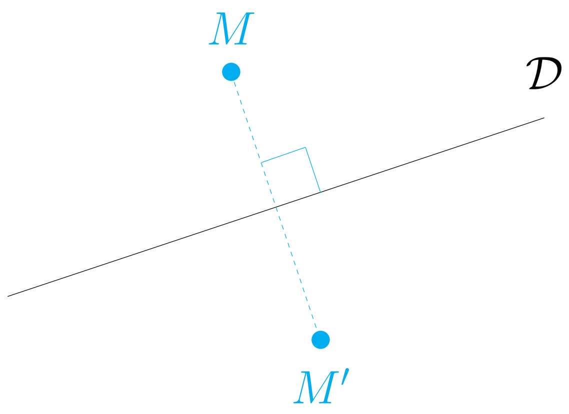
Réflexions (REF)

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit M un point du plan. Si $M \notin \mathcal{D}$, l'image par la **réflexion de droite** $\mathcal{D}$ du point M est le point M' vérifiant

$$\begin{cases} (MM') \perp \mathcal{D} \\ \text{le milieu de } [M, M'] \text{ appartient à } \mathcal{D} \end{cases}$$

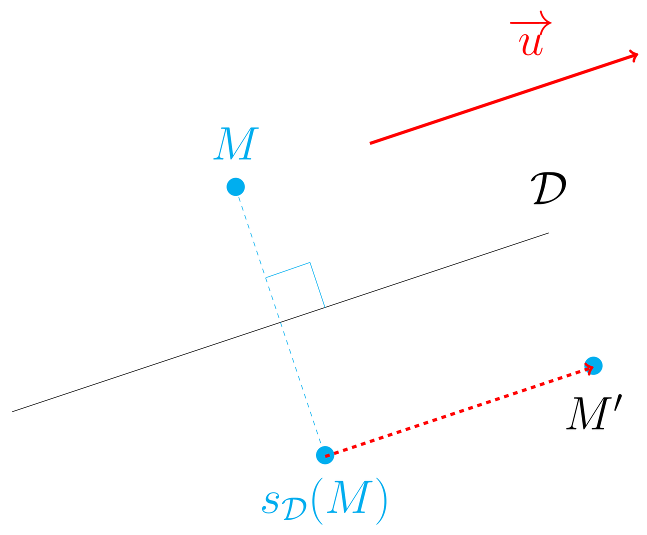
c'est-à-dire tel que $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[M, M']$. Si $M \in \mathcal{D}$, on pose $M' = M$. Ce point M' est noté $s_{\mathcal{D}}(M)$.

Parmi ces réflexions, celles d'axes horizontaux (**REF-H**) et celles d'axes verticaux (**REF-V**) nous intéressent dans la suite.



Réflexions glissées (REF-G)

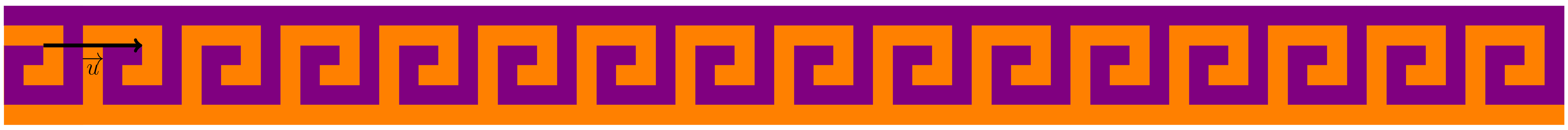
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan qui dirige $\mathcal{D}$. Soit M un point du plan. L'image par la **réflexion glissée de droite** $\mathcal{D}$ et **de vecteur** $\vec{u}$ est le point $s_{\mathcal{D}}(t_{\vec{u}}(M))$, c'est aussi le point $t_{\vec{u}}(s_{\mathcal{D}}(M))$.



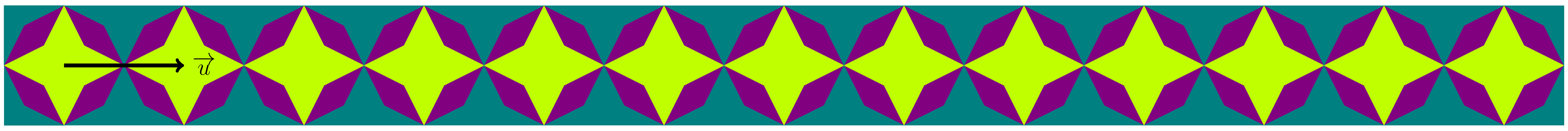
Qu'est-ce qu'une frise ?

Une **frise** est une partie $\mathcal{F}$ du plan pour laquelle il existe un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que l'ensemble des **translations** qui laissent $\mathcal{F}$ **invariante** est $\{t_{k\vec{u}}, k \in \mathbb{Z}\}$. En voici quelques-unes.

Ⓐ



Ⓑ



Ⓒ

On peut classer les frises en **sept catégories** selon l'ensemble des isométries qui les laissent invariantes. Cet ensemble a une structure de **groupe**.

① L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient uniquement **des translations.**

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

② L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient des **translations**, une **réflexion d'axe horizontal**, des **réflexions glissées** d'axe horizontal.

T	ROT	REF-H	REF-H	REF-G

③ L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient des **translations**, des **réflexions d'axes verticaux**.

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

④ L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient des **translations** et des **réflexions glissées** d'axe horizontal.

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

⑤ L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient **des rotations** d'angles de mesure π et des **translations**.

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

⑥ L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient des **translations**, des **réflexions d'axes verticaux**, des **réflexions glissées** d'axe horizontal et des **rotations**.

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

⑦ L'ensemble des isométries laissant invariante cette frise contient des **translations**, une **réflexion d'axe horizontal**, des **réflexions d'axes verticaux**, des **réflexions glissées** et des **rotations**.

T	ROT	REF-H	REF-V	REF-G

La frise Ⓐ est dans la catégorie ①, la frise Ⓑ est dans la catégorie ⑦, la frise Ⓒ est dans la catégorie ⑥.