# La série harmonique

## Définition

On définit le $n$ième **nombre harmonique** par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Ainsi :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n \approx$ | 1 | 1,5 | 1,83 | 2,08 | 2,28 | 2,45 | 2,59 | 2,72 | 2,83 | 2,92 | ... |

## La constante d'Euler-Mascheroni

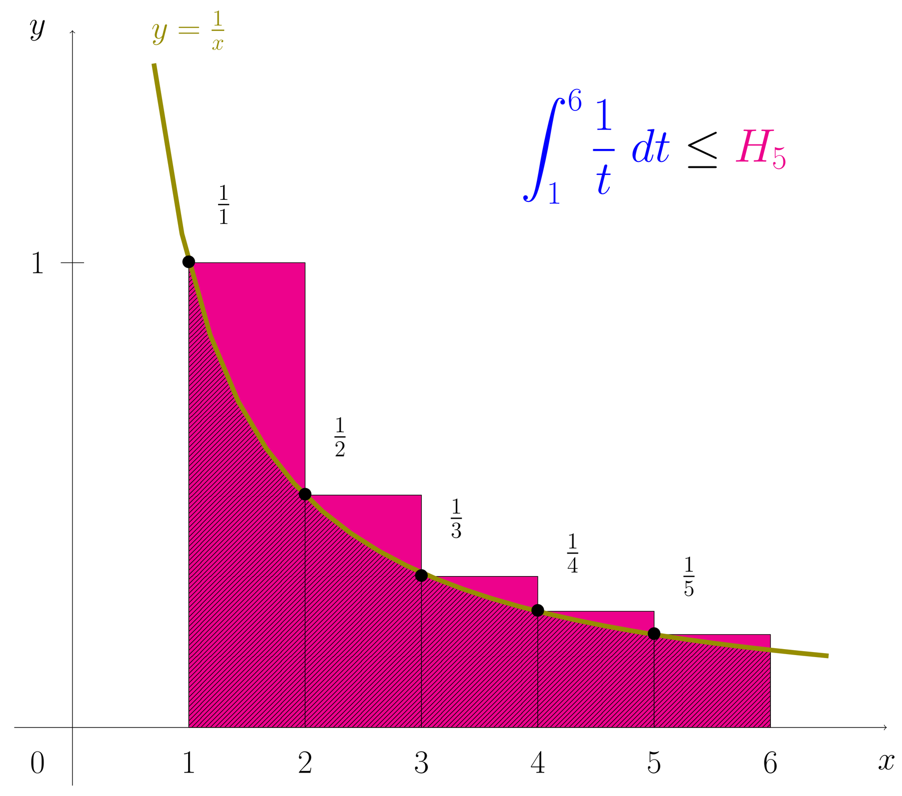
On peut démontrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge : on note $\gamma$ sa limite, appelée la constante d'Euler-Mascheroni.

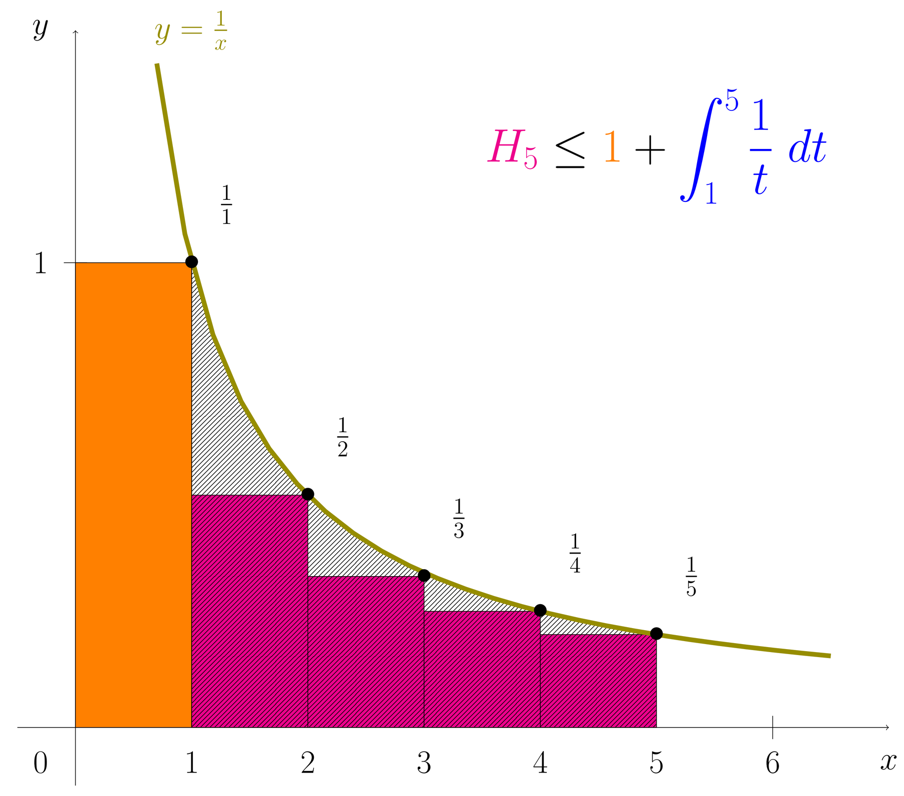
$$\gamma \approx 0,5772156649\ldots$$

Les décimales de la constante d'Euler-Mascheroni forment la suite **A001620** de l'**OEIS**.
On ne sait toujours pas si la constante d'Euler-Mascheroni est un nombre rationnel ou non.

## Encadrement de $H_n$

En comparant $H_n$ à une intégrale, on a :




On a donc que :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{ainsi :} \qquad \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Ceci démontre que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, à la même vitesse que la suite $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ce qui n'est pas très rapide) :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

## Leonhard Euler ...

...est un **mathématicien** et **physicien** suisse (1707 - 1783). Il a travaillé dans divers domaines des mathématiques (analyse, algèbre, théorie des graphes, ...) et ses contributions à l'ensemble des mathématiques sont extrêmement nombreuses dont la célèbre identité portant son nom : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

## Lorenzo Mascheroni ...

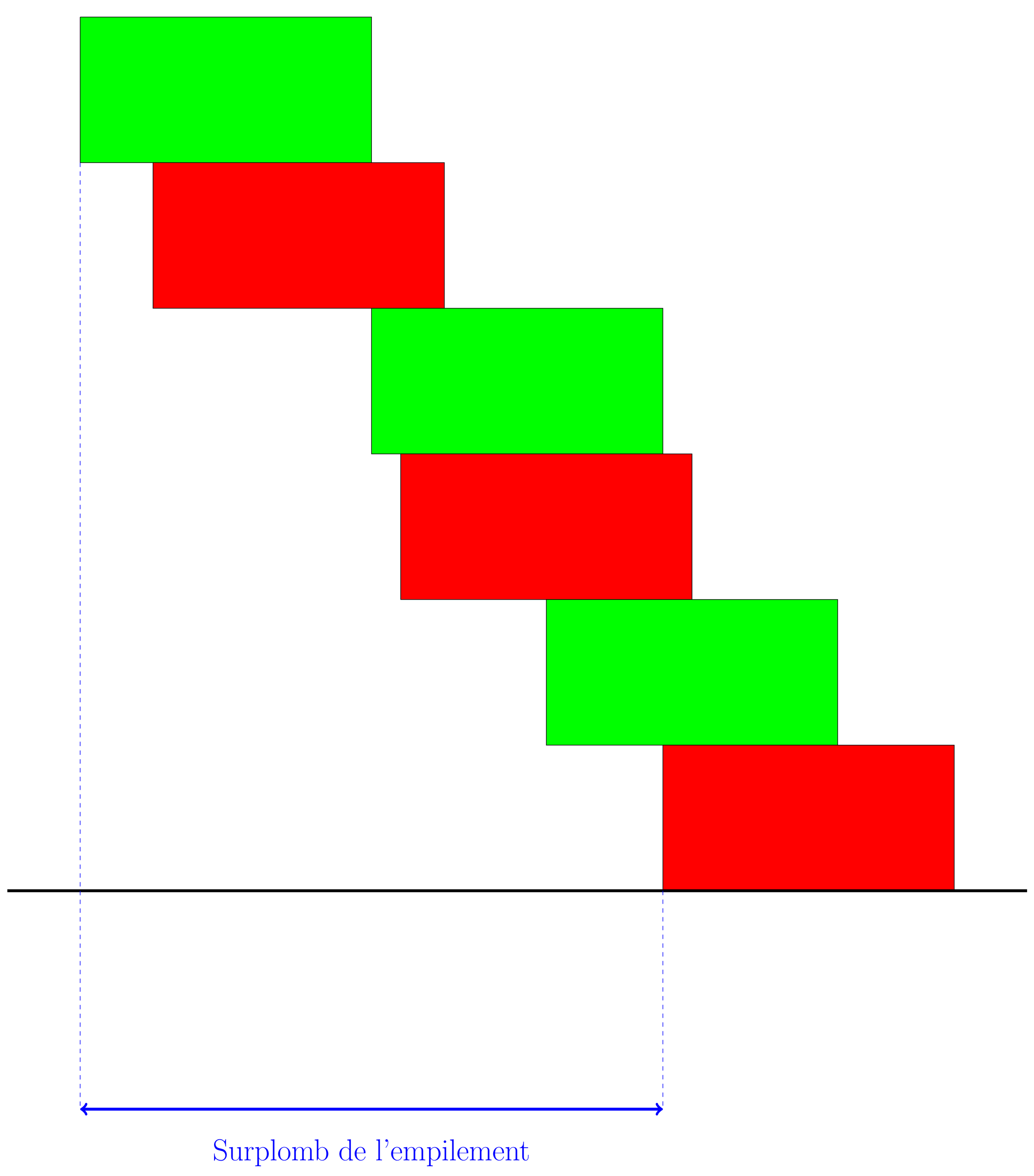
...est un **géomètre** italien (1750 - 1800). Il a travaillé sur les constructions possibles à la règle et au compas. Napoléon Bonaparte, grand amateur de problèmes géométriques et qui a rencontré personnellement Mascheroni, s'est déclaré impressionné par ses travaux.

## Encyclopédie des suites d'entiers (OEIS)

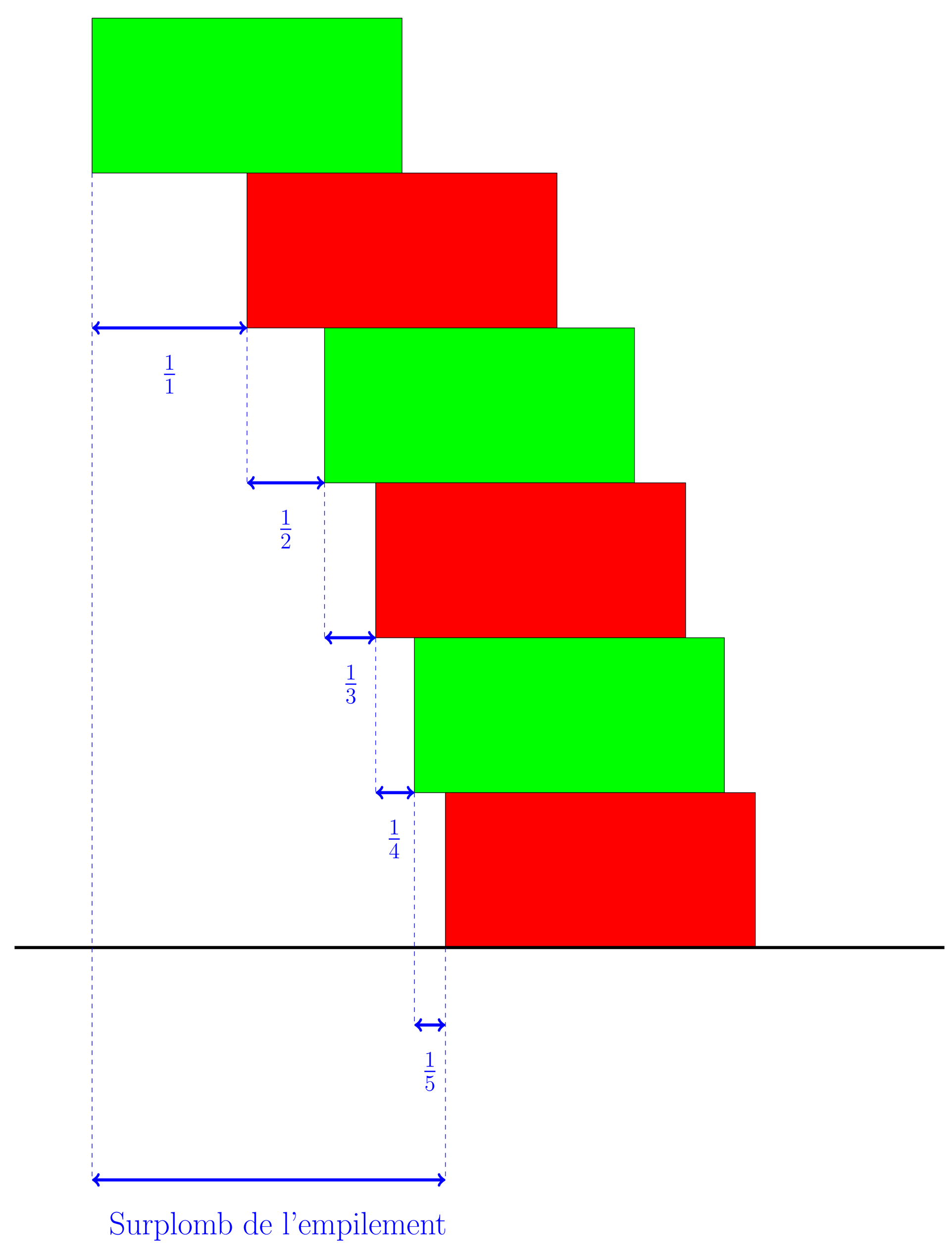
L'OEIS **O**nline **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences est une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique. On y trouve par exemple la suite de Fibonacci (**A000045**) ou encore la suite des nombres de Catalan (**A000108**). Chaque suite dispose d'un identifiant et pour chercher une suite de la base, il suffit de rentrer sur le site ses premiers termes.

## Des empilements stables

On considère des briques de longueur 2, de hauteur 1 que l'on empile de telle manière que chacune dépasse sur la gauche de celle qui est située juste au-dessous, et que cet empilement soit **stable** : *physiquement, cela signifie que le centre de gravité de l'ensemble de toutes les briques au-dessus d'une brique donnée est à la verticale d'un point de cette brique.*




**Empilement non stable**




**Empilement stable optimal**

On démontre que l'empilement stable optimal est obtenu de la manière suivante :

- La première brique du haut dépasse de 1 sur la gauche de la brique juste en dessous.
- La deuxième brique du haut dépasse de $\frac{1}{2}$ sur la gauche de la brique juste en dessous.
- La troisième brique du haut dépasse de $\frac{1}{3}$ sur la gauche de la brique juste en dessous.
- ...

**Le surplomb maximal avec $n$ briques est donc $H_{n-1}$.**

Le fait que $(H_n)$ tende vers $+\infty$ signifie, en termes de surplomb, que l'on peut obtenir un surplomb aussi grand qu'on veut en mettant suffisamment de briques.
Avec l'étude de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il faut mettre au moins 5 briques afin que la brique du haut soit entièrement au-dessus du vide. Il faut mettre au moins 32 briques pour avoir un surplomb de 2 briques. Il faut mettre au moins 228 briques pour avoir un surplomb de 3 briques. On retrouve l'idée que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ assez lentement.