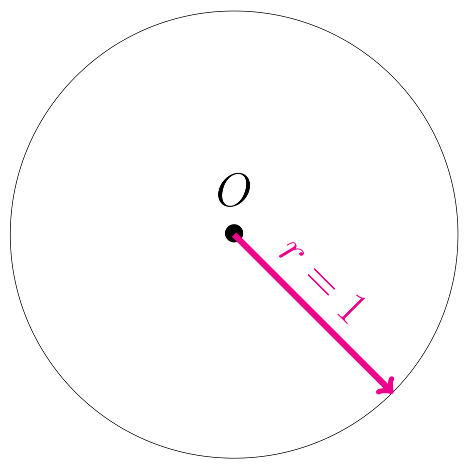
Géométrie hyperbolique

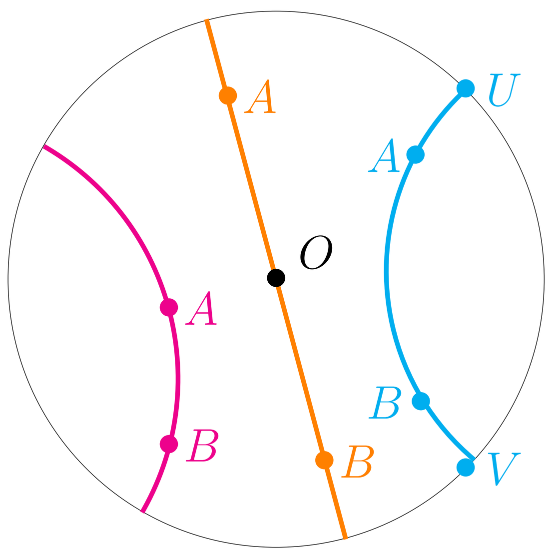
Disque de Poincaré

Le **disque** de Poincaré est le disque du plan de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1, la frontière est exclue. On le note D_H. Dans ce disque, on peut définir une **géométrie un peu originale**.



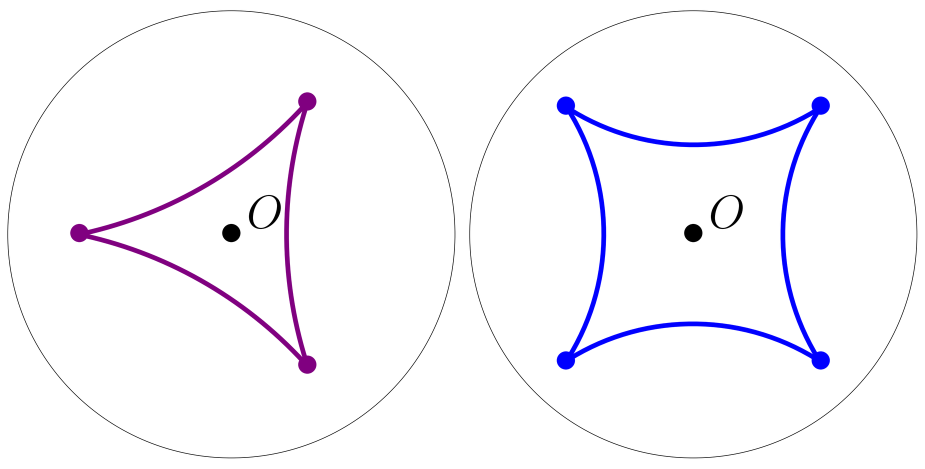
Droites hyperboliques

Par deux points A et B de D_H, il existe un unique arc de cercle passant par ces points et orthogonal à la frontière du disque. Cet arc de cercle est la **droite hyperbolique** (AB). Dans le cas où $O \in [A,B]$, cette **droite hyperbolique** est un des diamètres du cercle. Dans cette géométrie, la **distance** de A à B est $\frac{1}{2}\left|\ln \frac{AV.BU}{AU.BV}\right|$.



Polygones hyperboliques

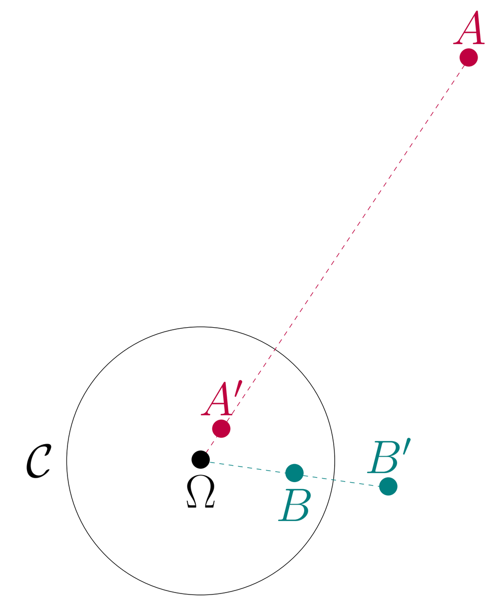
Dans cette géométrie, les **polygones** ont des formes et des propriétés un peu curieuses. Dans un triangle par exemple, **la somme des angles est inférieure** à π.



Inversion par rapport à un cercle

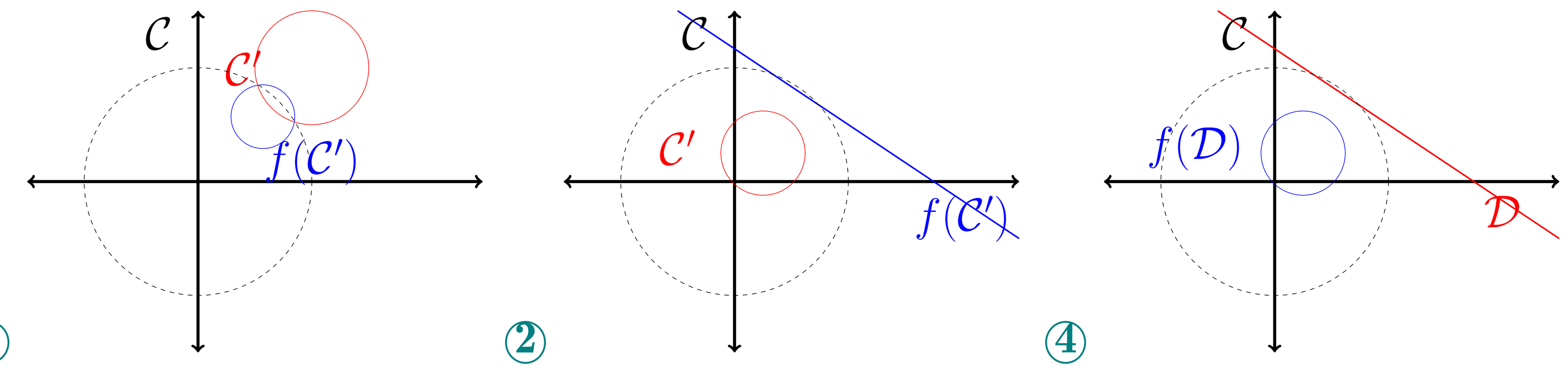
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R. Soit M un point du plan différent de Ω. **L'inverse de** M **par rapport au cercle** $\mathcal{C}$ est le point M' tel que $M' \in [\Omega M)$ et $\Omega M.\Omega M' = R^2$.
On constate que :

- Si $M \in \mathcal{C}$, alors son inverse par rapport à $\mathcal{C}$ est lui-même,
- l'inversion est une **involution**, c'est-à-dire que si M' est l'inverse de M par rapport à $\mathcal{C}$, alors M est l'inverse de M' par rapport à $\mathcal{C}$.



① L'image d'un cercle $\mathcal{C}'$ ne passant pas par Ω est un cercle ne passant par Ω.
② L'image d'un cercle $\mathcal{C}'$ passant par Ω est une droite ne passant pas par Ω.
③ L'image d'une droite $\mathcal{D}$ passant par Ω est elle-même.
④ L'image d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω.

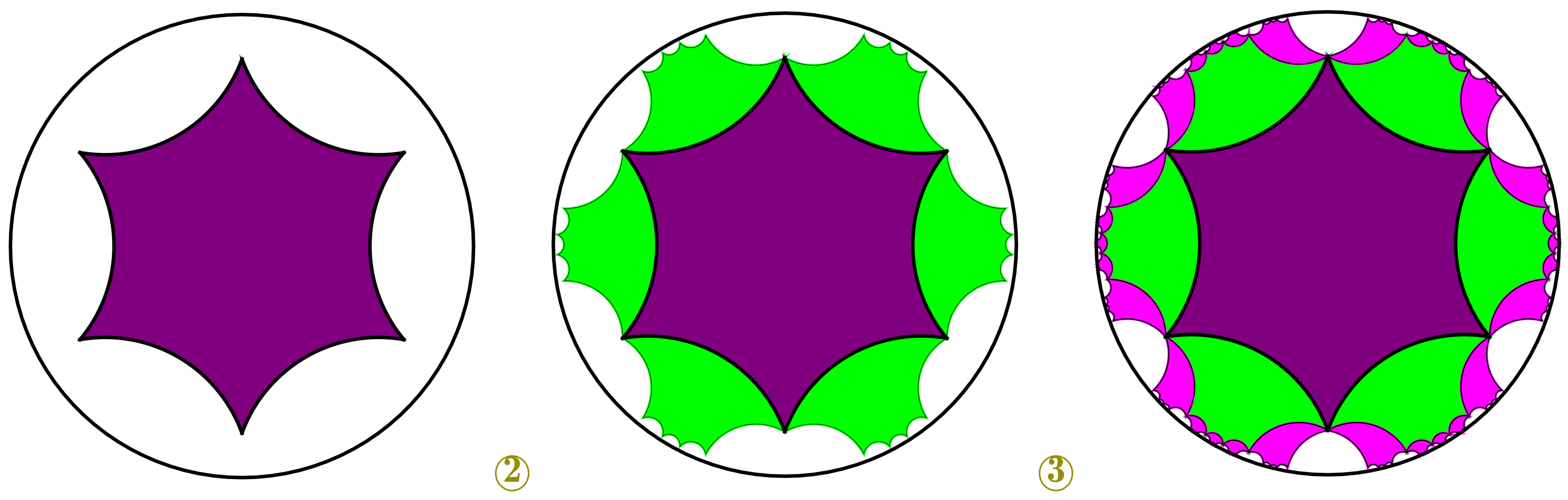
Voici quelques illustrations dans le cas de l'inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon 1. L'application inversion est notée f.



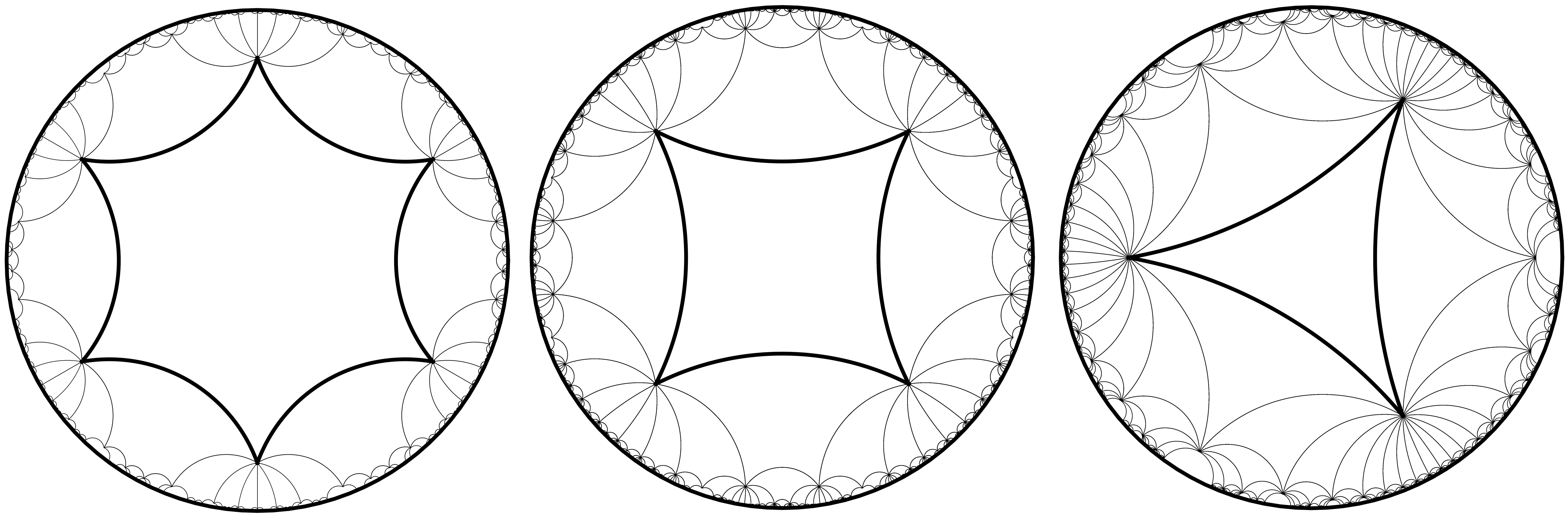
Si on considère une droite hyperbolique (AB) et si on note $\mathcal{C}$ le cercle correspondant. L'inversion par rapport à $\mathcal{C}$ correspond à la **symétrie hyperbolique par rapport à la droite hyperbolique** (AB).

Pavages hyperboliques

① Partons d'un **hexagone hyperbolique régulier** et centré en O.
② On trace ensuite le **symétrique hyperbolique** de cette figure par rapport à chacun de ses côtés. On a donc maintenant 7 hexagones hyperboliques (en comptant l'initial). Malgré les apparences, ces nouveaux hexagones sont bien réguliers.
③ On trace ensuite les **symétriques hyperboliques** de ces nouveaux hexagones figure par rapport à chacun des nouveaux côtés.
④ On recommence ...



De façon générale, si on **choisit deux entiers naturels non nuls** n **et** p **tels que** $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$, il existe un polygone régulier à n côtés centré en O tel que si l'on applique le procédé précédent, on obtient alors un pavage du disque à l'aide de polygones réguliers à n côtés tel que chaque sommet du pavage appartient à p polygones du pavage. On obtient ainsi de **jolies figures**.



④ $(n,p) = (6,9)$ $(n,p) = (4,10)$ $(n,p) = (3,18)$