L'inversion dans $\mathbb{C}$

Définition

On généralise $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

On note

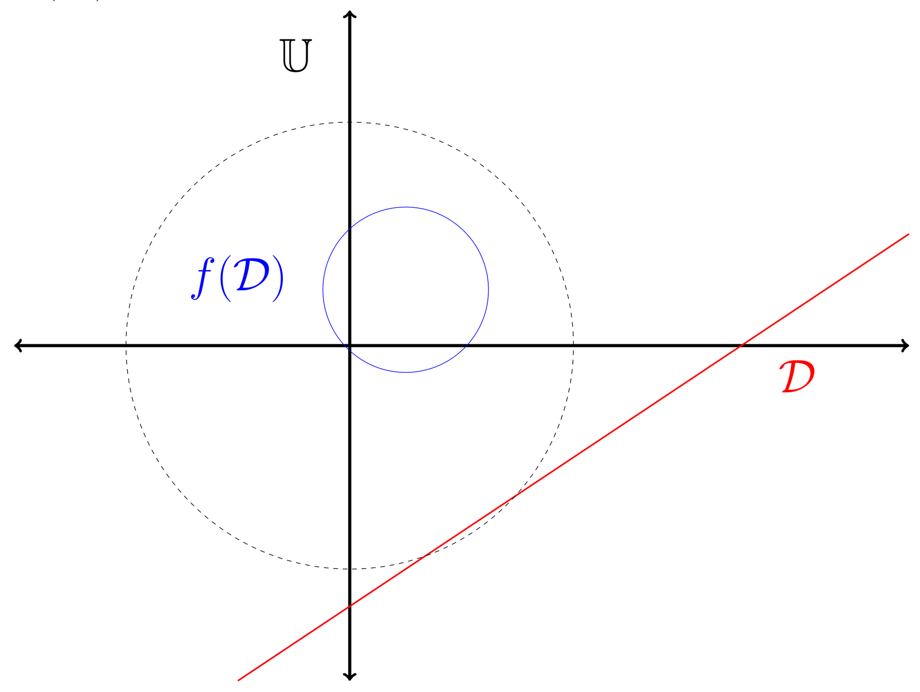
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{1}{z} \end{array}.$$

Si on note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Image d'une droite

- Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan ne passant pas par O, alors $f(\mathcal{D})$ est un cercle du plan qui passe par O privé de O.



- Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan passant par O, alors $f(\mathcal{D} \setminus \{O\})$ est une droite du plan passant par O privée de O.

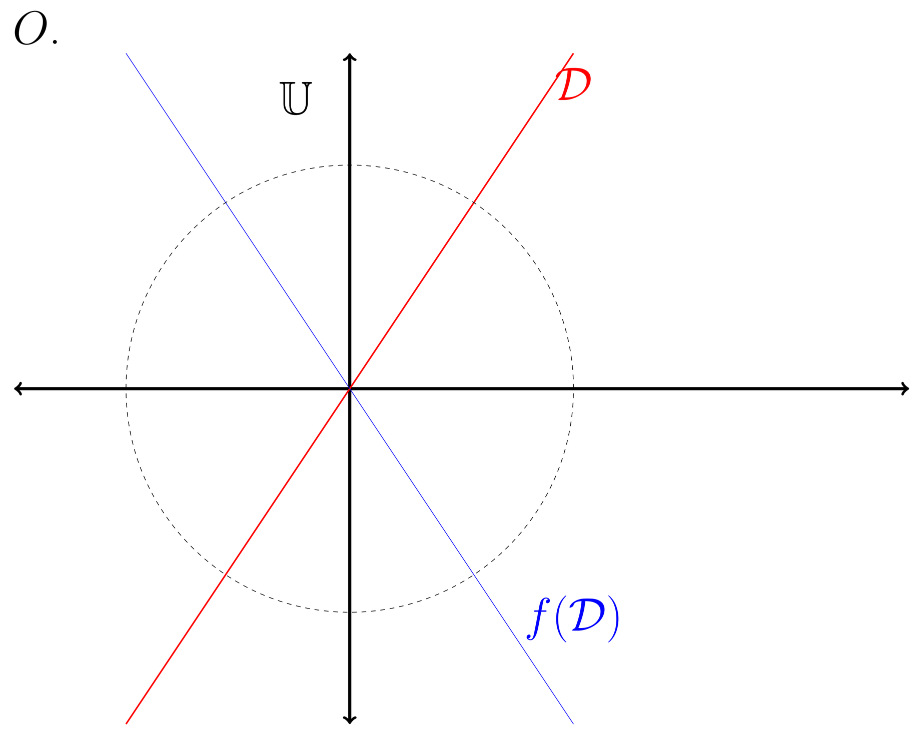
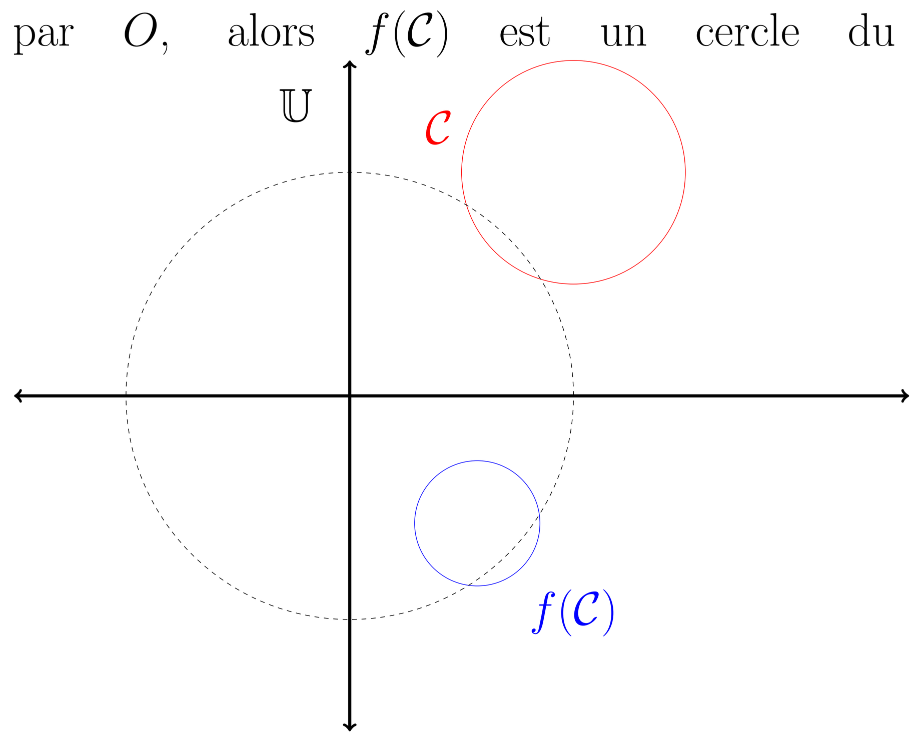


Image d'un cercle

- Si $\mathcal{C}$ est un cercle du plan ne passant pas par O, alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle du plan.



- Si $\mathcal{C}$ est un cercle du plan passant par O, alors $f(\mathcal{C} \setminus \{O\})$ est une droite du plan.

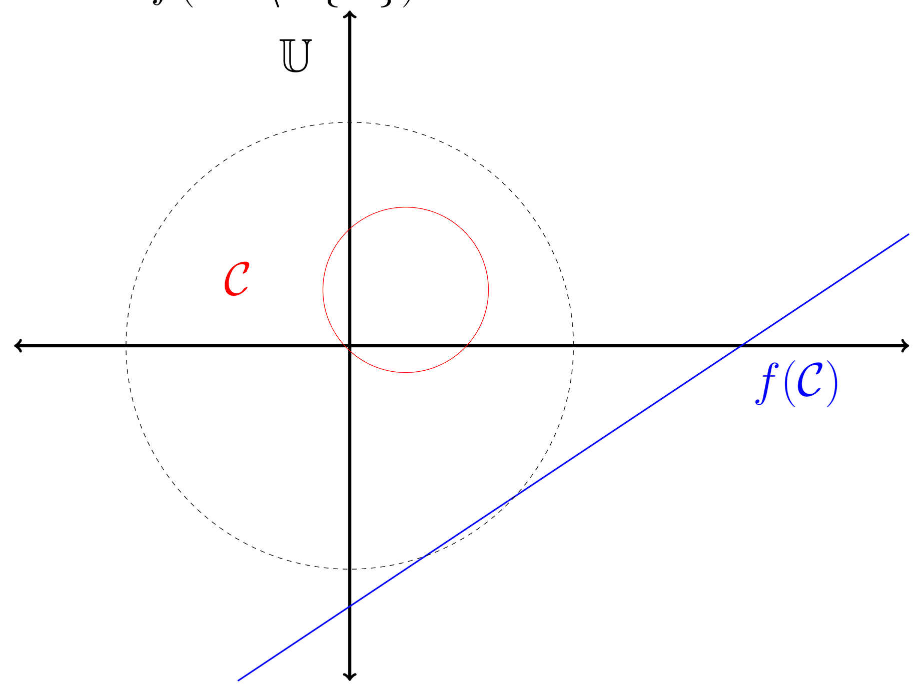
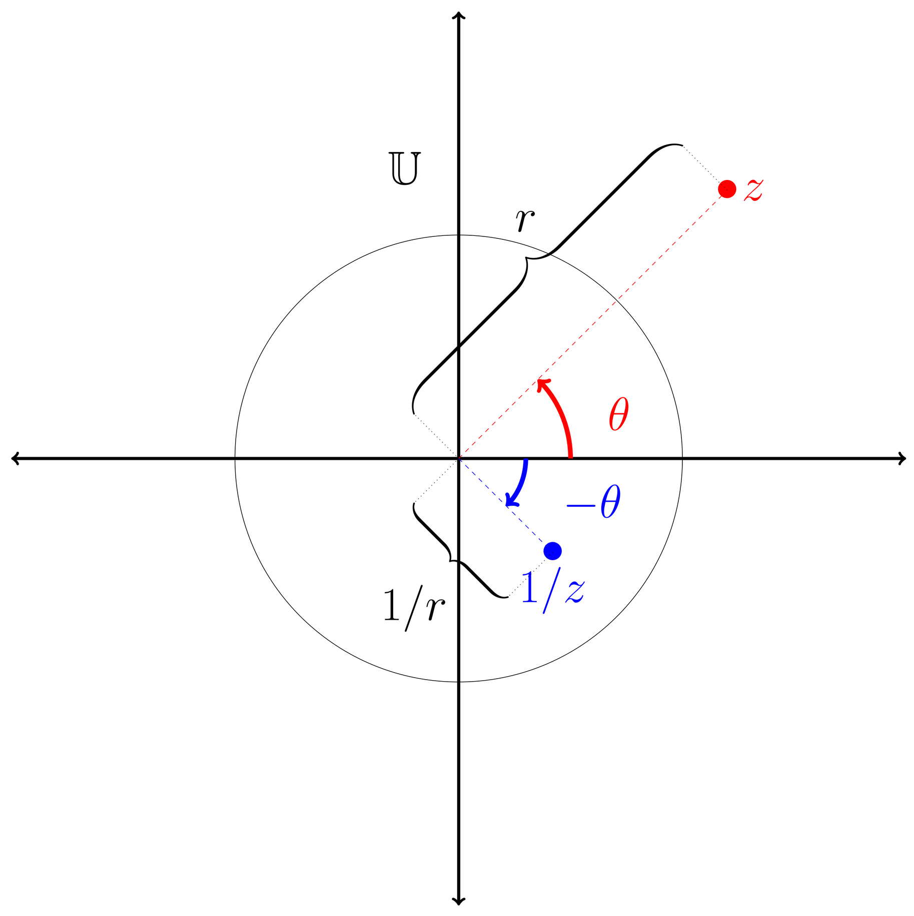


Image d'un point

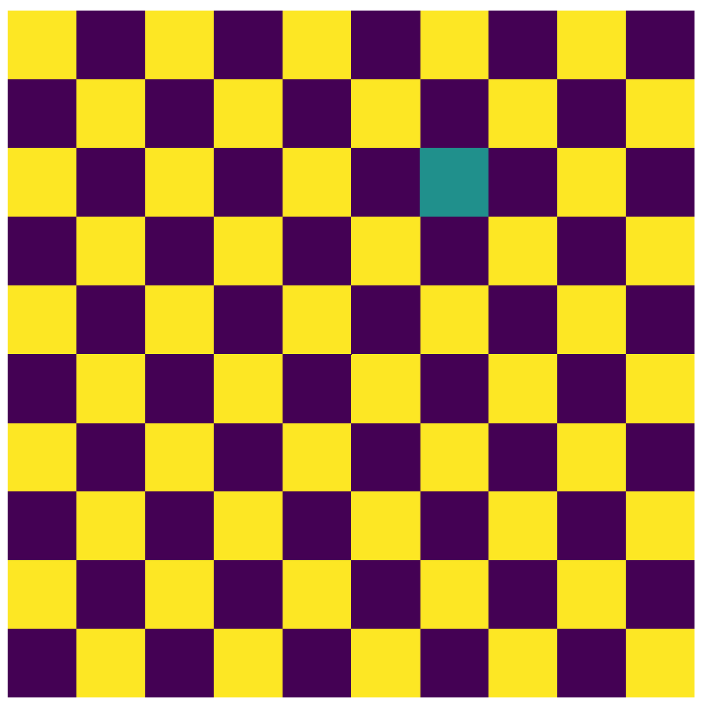
Le plan est muni d'un repère orthonormé : on identifie un point et son affixe.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, qu'on écrit sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.



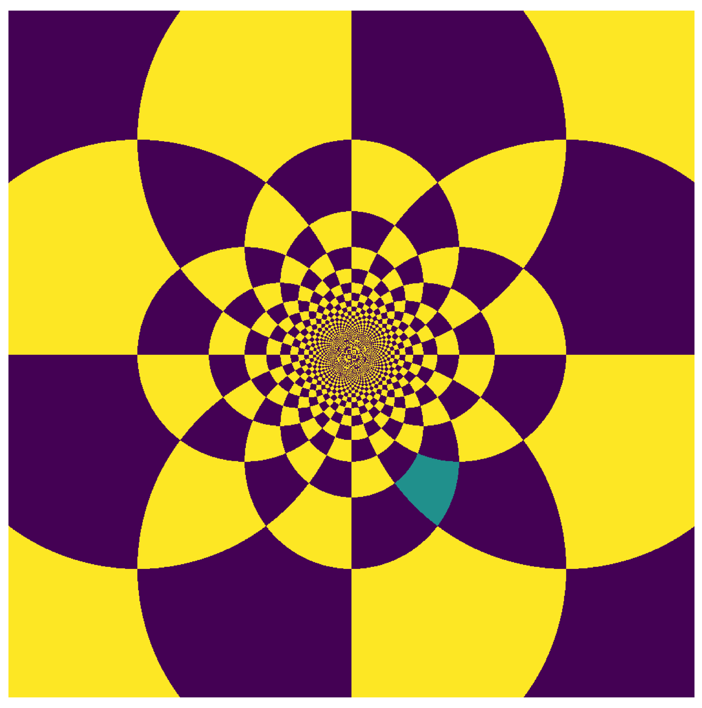
Représentation dans $\mathbb{C}$

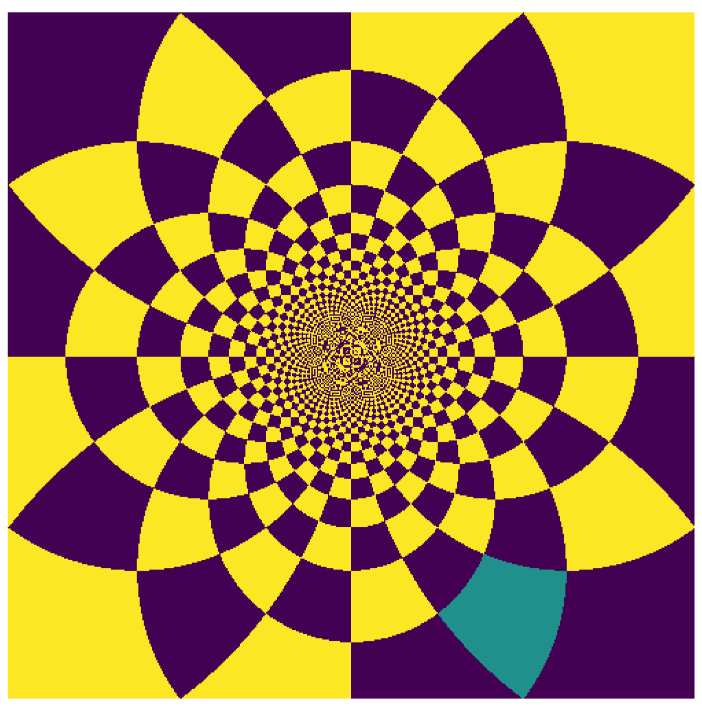
Où on obtient de jolies images...



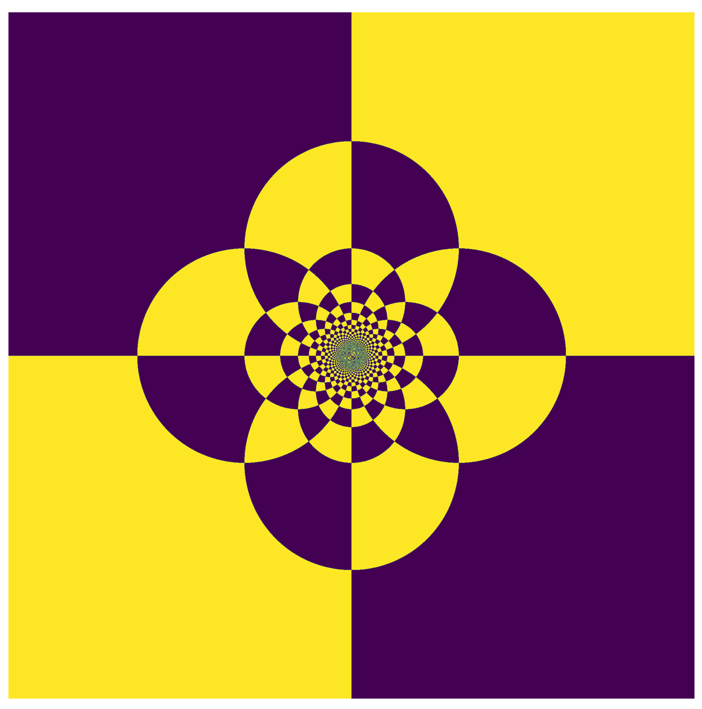
On partitionne le plan entier en petits carrés de 0.4 cm de côté : ici à gauche, on a représenté $[-2, 2]^2$ en 100 petits carrés jaunes, noirs et verts de côté 0.4 cm.

On représente l'image par l'inversion de cette partition du plan : ici à droite, on a zoomé sur $[-2, 2]^2$.

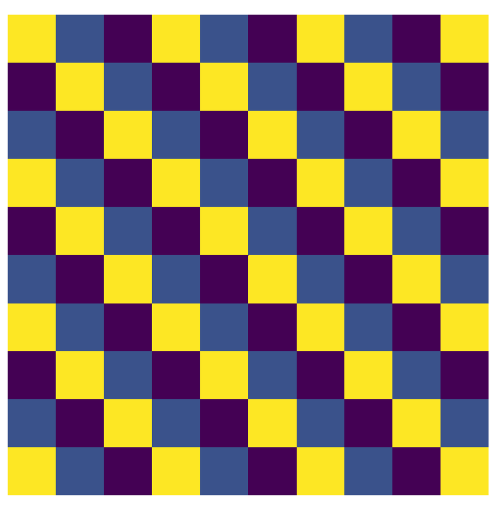
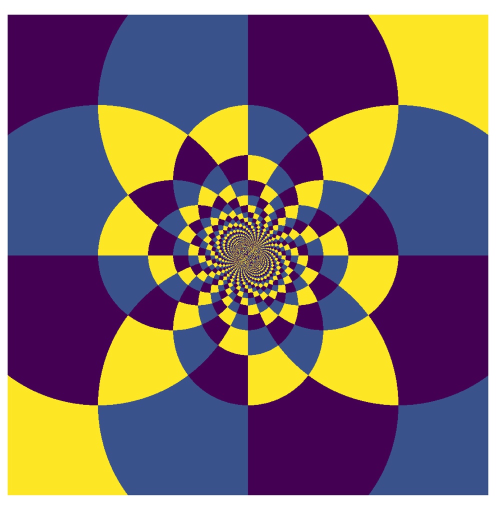
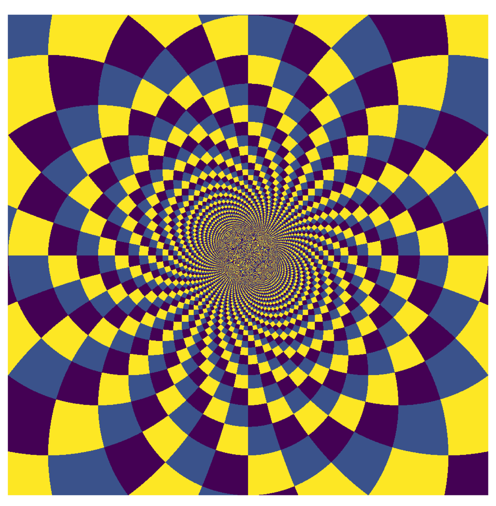
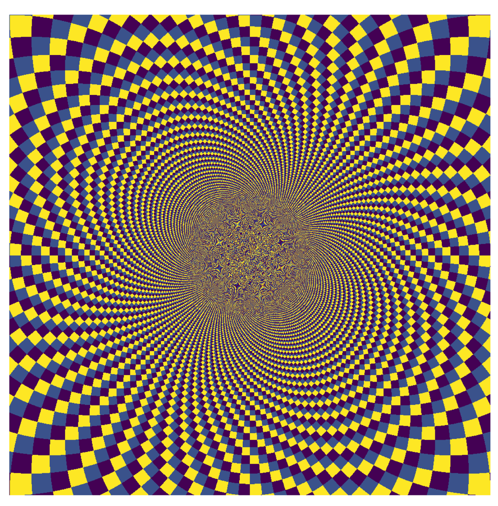




À gauche, on a zoomé sur $[-1, 1]^2$ et à droite, on s'est placé sur $[-4, 4]^2$.



En partant d'autres partitions du plan, on peut obtenir de très jolies images ! En voici quelques unes :

Roulement à billes

Question ?

Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tels que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ et que $\mathcal{C}_2$ soit inclus dans le disque délimité par $\mathcal{C}_1$, dans quelles configurations est-il possible de trouver un nombre fini de cercles permettant de réaliser cette figure ?