Jonglage

Contexte

On s'intéresse ici à la **jonglerie asynchrone** c'est-à-dire :

- chaque main lance alternativement une balle,
- une main lance au plus une balle à la fois,
- une main reçoit au plus une balle à la fois.

On peut alors représenter les séquences de jonglage par des **tresses** ou par des suites finies d'entiers appelées **siteswap**.

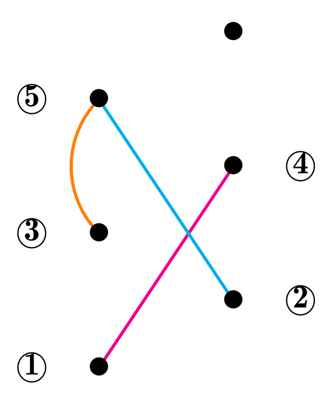
Théorème de la moyenne

Enoncé

*La moyenne des nombres d'un siteswap est égal au **nombre de balles** nécessaires pour le jongler.*

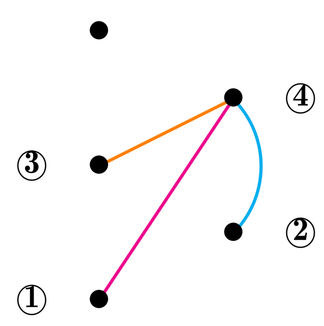
Exemples

- Le nombre de balles nécessaires pour jongler la figure **441** est **3**.
- La moyenne de la séquence **332** n'est pas un entier : cette séquence n'est donc **pas jonglable**. On peut d'ailleurs le constater en essayant de la représenter :



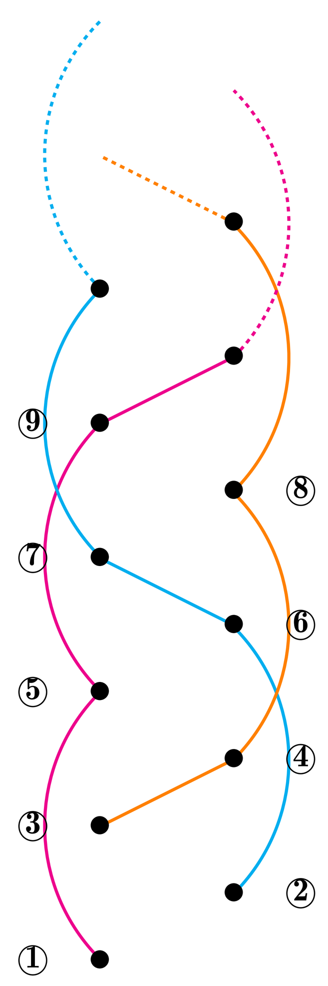
Il y a une **collision** à l'instant $t = 5$.

- La moyenne de la séquence **321** est un entier et pourtant elle n'est **pas jonglable** comme on peut le constater ici :



Il y a une **collision** à l'instant $t = 3$.

Tresse et siteswap



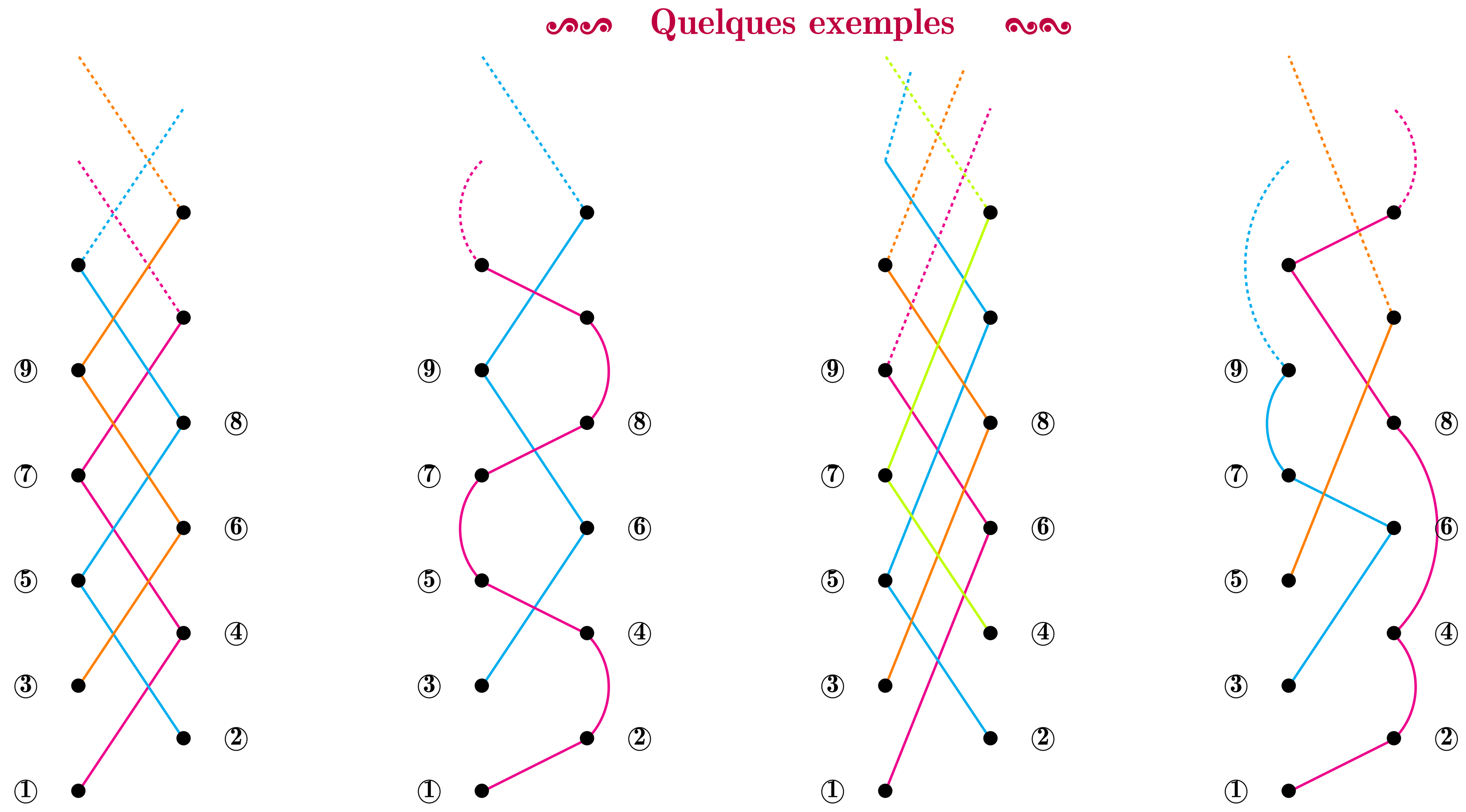
Il s'agit ici d'une figure de jonglage à 3 **balles** et **périodique** : une **rose**, une **bleue**, une **orange**.

- A $t = 1$, la balle **rose** est lancée par la main **gauche**. Elle sera rattrapée par cette même main à $t = 5$.
- A $t = 2$, la balle **bleue** est lancée par la main **droite**. Elle sera rattrapée par cette même main à $t = 6$.
- A $t = 3$, la balle **orange** est lancée par la main **gauche** et est rattrapée par la main **droite** à $t = 4$.
- On recommence ...

La notation **siteswap** de cette figure est **441** :

★ La balle lancée lors du 1er lancer reste **4** unités de temps en l'air (on dit que le lancer est de **hauteur** 4),
★ La balle lancée lors du 2nd lancer reste **4** unités de temps en l'air,
★ La balle lancée lors du 3e lancer reste **1** unité de temps en l'air,
★ La séquence se répète...

Quelques exemples



333 **123** **53** **12345**

Théorème de collision

Enoncé

*Soit une séquence finie d'entiers naturels $a_1a_2...a_m$. Alors cette séquence est un **siteswap** jonglable si et seulement si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow a_i + i \neq a_j + j \mod m).$$

Exemples

- **321** n'est pas jonglable puisque $2 + 2 = 1 + 3 \mod 3$.
- **12345** est jonglable puisque si on représente les $a_i + i \mod m$ dans un tableau, on constate qu'il n'y a pas de répétition.

i	1	2	3	4	5
a_i	1	2	3	4	5
$a_i + i \mod 5$	**2**	**4**	**1**	**3**	**0**

Représentation par graphes

Considérons un jonglage à 3 balles (**rose**, **bleue** et **orange**) dont chaque lancer dure au plus 5 unités de temps. On peut représenter l'état de la figure à un instant t donné par une suite de 0 et de 1 ainsi :

11010

Et cela s'interprète comme suit :

$$\underbrace{1}_{t+1}\ \underbrace{1}_{t+2}\ \underbrace{0}_{t+3}\ \underbrace{1}_{t+4}\ \underbrace{0}_{t+5}$$

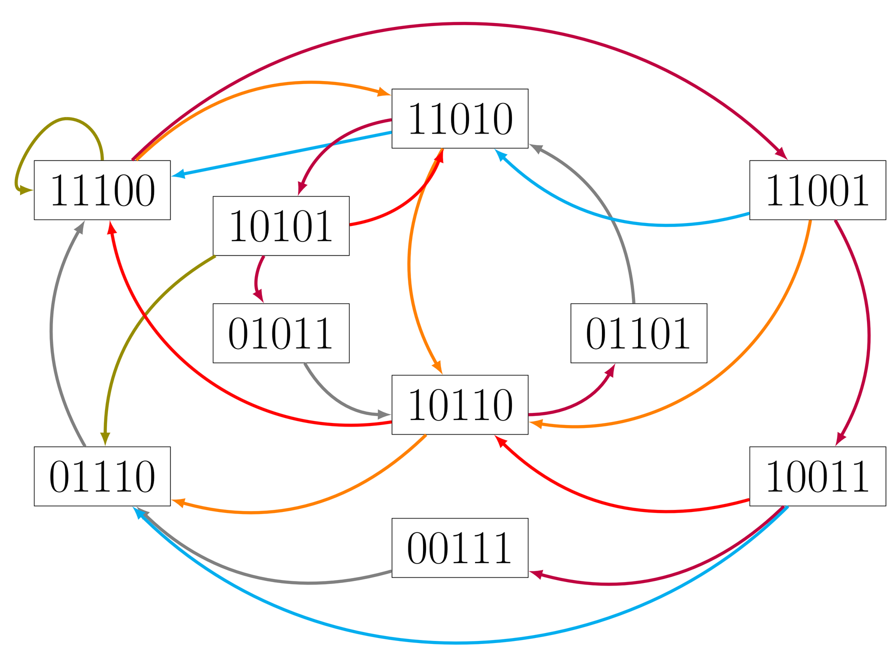
La balle **rose** va retomber à l'instant $t + 1$, la balle **bleue** va retomber à l'instant $t + 2$ et la balle **orange** va retomber à l'instant $t + 4$. Avançons un peu : la balle **rose** est retombée dans une main et a été relancée aussitôt. Voilà quel pourrait être l'état suivant :

10101

Mais cela pourrait aussi être :

10110 ou **11100**

On peut représenter toutes les enchaînements possibles par un graphe où chaque arc a la couleur de la hauteur du lancer (**5**,**4**,**3**,**2**,**1**) :



En se promenant sur ce graphe, on obtient toutes les séquences possibles à 3 balles avec des lancers de hauteur ≤ 5.

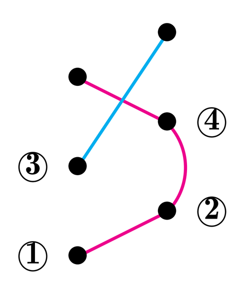
Théorème de réarrangement

Enoncé

*Soit une séquence finie d'entiers naturels $a_1a_2...a_m$ dont la moyenne est un entier. Alors, il existe une **permutation** de la séquence qui soit un **siteswap** jonglable.*

Exemple

321 n'est pas jonglable, sa moyenne est un entier et les séquences permutées **123**, **312**, **231** sont jonglables. Ce sont d'ailleurs les trois mêmes séquences.



123