Ensembles de Julia et Mandelbrot

Définition

Ensembles de Julia

Soit $c \in \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la suite (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 = a \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

On note alors

$$J_c = \{a \in \mathbb{C}, (z_n) \text{ bornée}\}$$

Les J_c sont des ensembles de Julia. On peut montrer qu'on a en fait

$$J_c = \{a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq 2\}$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$J_c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{a \in \mathbb{C}, |z_n| \leq 2\}}_{K_n}$$

Propriétés des J_c

- Les J_c sont fermés (comme intersection de fermés).
- Les J_c sont compacts (car fermés et bornés).
- Selon c, J_c peut être connexe (comme pour $c = -1$) ou non (comme pour $c = 0.85 + 0.01i$).

L'ensemble de Mandelbrot

On définit

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}, 0 \in J_c\}$$

C'est l'ensemble de Mandelbrot. On peut aussi le définir comme étant l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que J_c est connexe (ie d'un seul morceau).

Propriétés de $\mathcal{M}$

- Il est simplement connexe (résultat montré en 1985 !).
- Son aire est d'environ 1.51.
- Certaines parties de $\mathcal{M}$ (situées sur les bords) vérifient la propriété d'auto-similarité.

Les mathématiciens

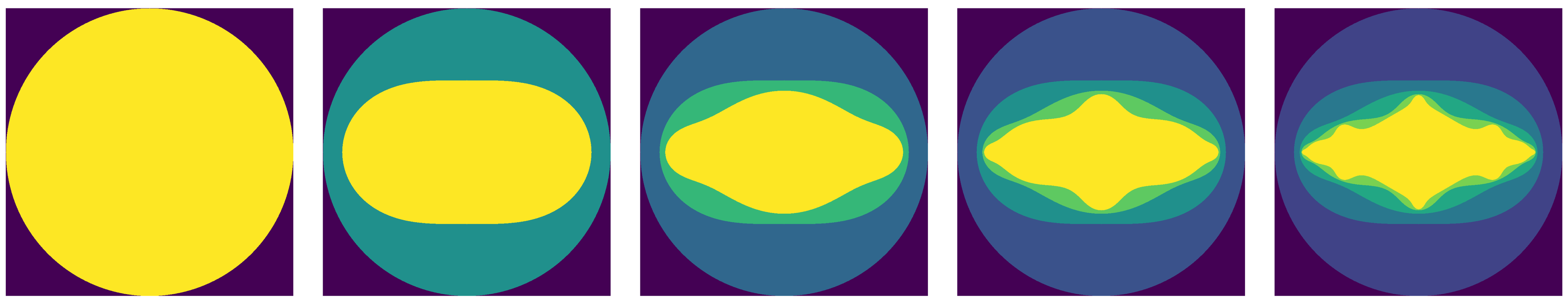
- Gaston Julia (1893 - 1978) est un mathématicien français.

- Benoît Mandelbrot (1924 - 2010) est un mathématicien de nationalités polonaise, américaine et française.

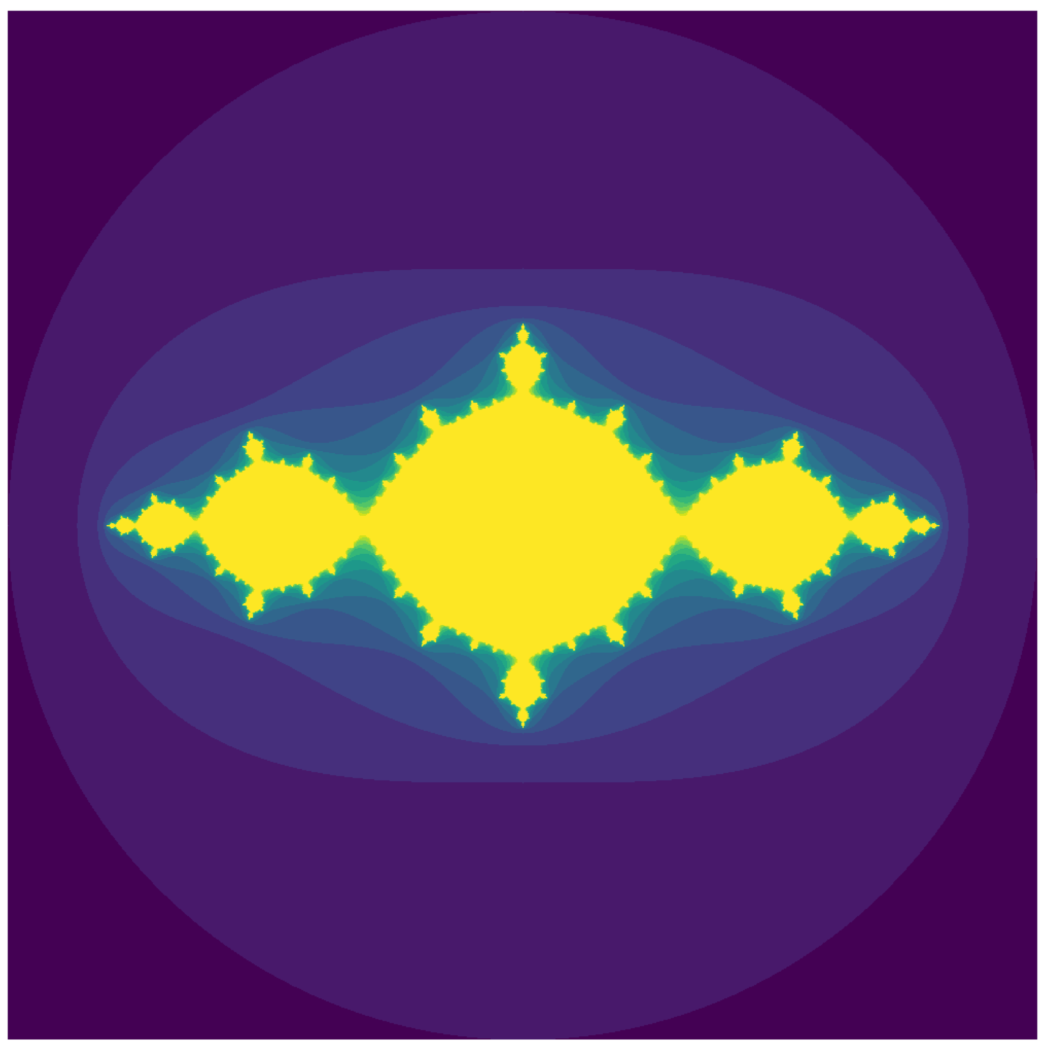
Tracé de J_{-1}

Python à la rescousse

On peut se placer directement sur $[-2, 2]^2$. En traçant successivement K_0, K_1 ,..., K_4, on obtient :

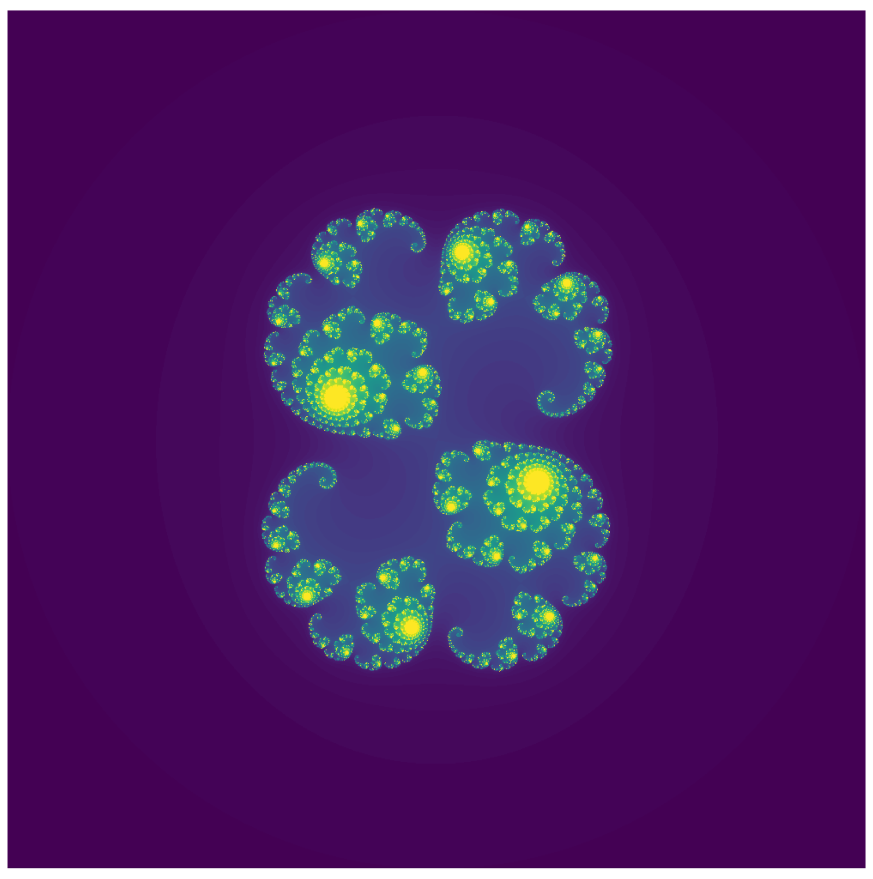


Petit à petit, J_{-1} apparaît... et après de nombreuses itérations :

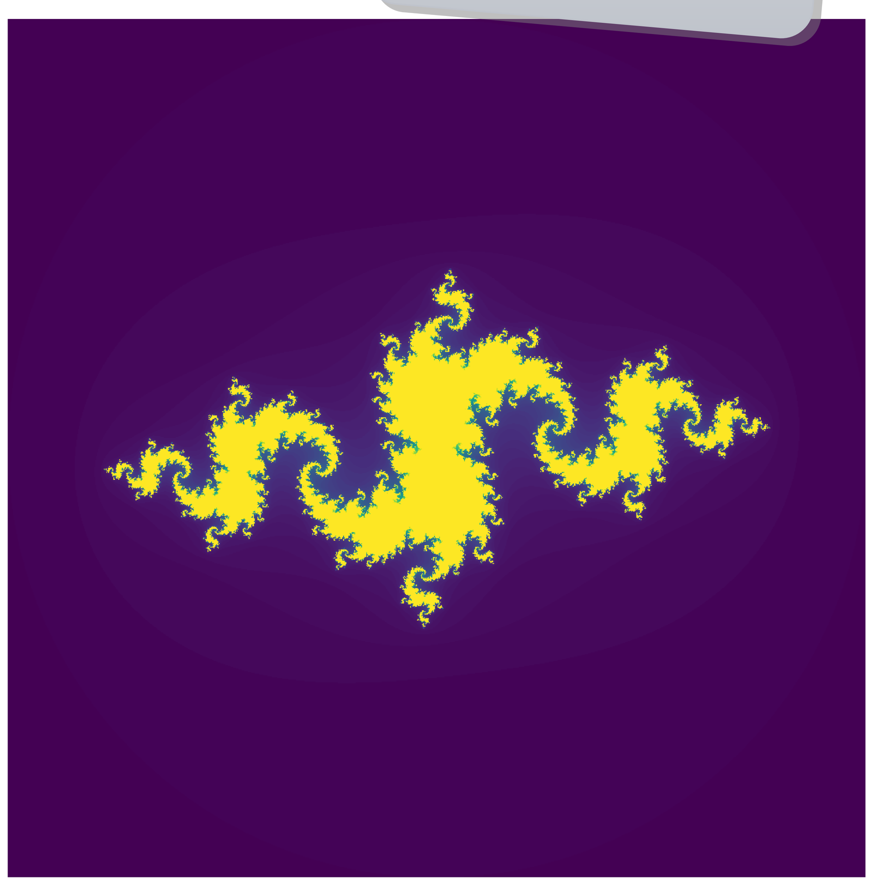


D'autres J_c

En faisant varier c, on obtient de jolies images !



$c = 0.85 + 0.01i$



$c = -0.85 + 0.2i$

Représentation de $\mathcal{M}$

On s'est placé sur $[-2, 2]^2$ puis sur $[-1, 1]^2$