Systèmes de Lindenmayer ou L-systèmes

De l'informatique théorique...

Waouh, c'est abstrait !!! Mais, en fait, c'est tout bête...

Un L-**système** est un système de grammaire formel muni :
- d'un **alphabet** constitués de lettres : F, G, A, ...
- de **constantes** : $+$ et $-$
- d'un **axiome** de départ : un mot constitué de lettres et de constantes,
- de **règles** de réécriture automatique : chaque lettre est remplacée à l'étape suivante par un mot constitué de lettres et de constantes.

Avant de se perdre complètement, prenons un exemple.

On travaille sur l'alphabet muni que de la lettre F, les constantes $+$ et $-$, la règle $F \to +F--F+$ en partant du mot de départ (axiome) : F, alors en itérant, on a :
- itération 0 : F
- itération 1 : $+F--F+$
- itération 2 : $++F--F+--+F--F++$
- ...

En français : on part d'un mot de départ et on remplace chaque lettre par un mot fixé, et on itère !

Les origines

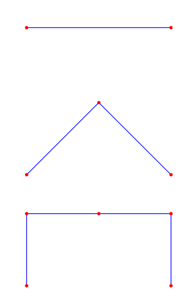
Ce système de réécriture générative a été inventée en 1968 par le **biologiste** hongrois Aristid Lindenmayer pour modéliser le développement et la prolifération de plantes ou de bactéries.

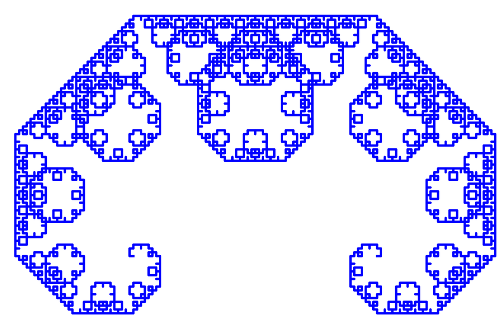
Quand la tortue se promène...

Images réalisées avec turtle (Python)

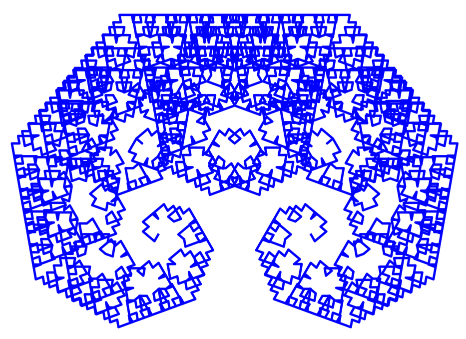
On choisit un **angle** et on lit un mot construit précédemment.
- lorsqu'on lit un F ou un G, la tortue avance d'un pas devant elle,
- lorsqu'on lit un $+$, la tortue tourne sur elle-même de l'angle qu'on a choisi,
- lorsqu'on lit un $-$, la tortue tourne dans l'autre sens,
- pour toutes les autres lettres, elle ne bouge pas.

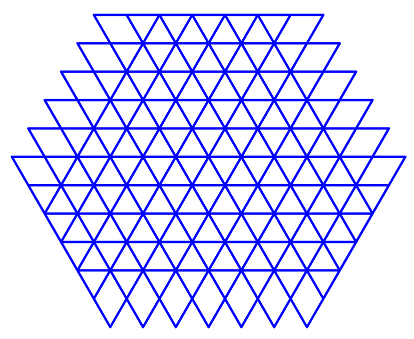
Pour l'exemple ci-contre, avec un angle de 45°, les itérations 0, 1, 2 et 12 donnent :

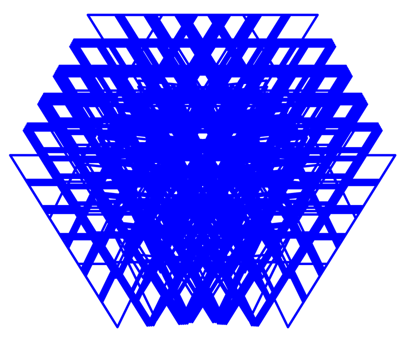




La courbe limite s'appelle la courbe de Lévy.
Toujours avec 12 itérations, mais avec des angles de 50°, 60° et 61° :

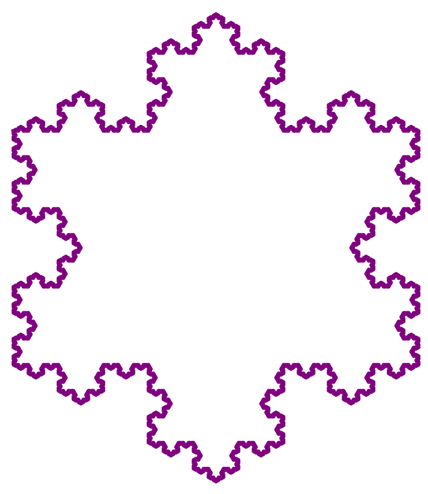






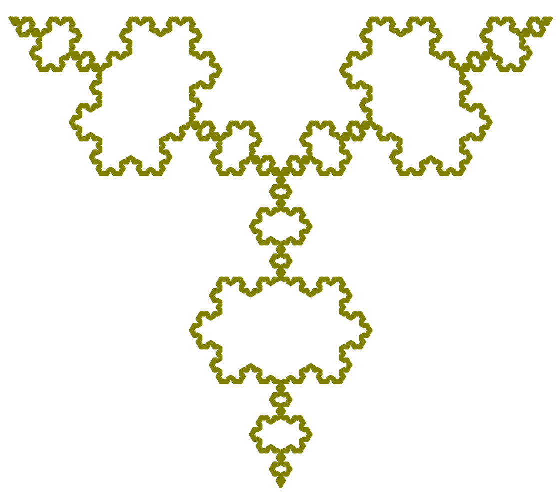
Le flocon de Von Koch

On part de $F--F--F$ avec $F \to F+F--F+F$ avec un angle de 60°.



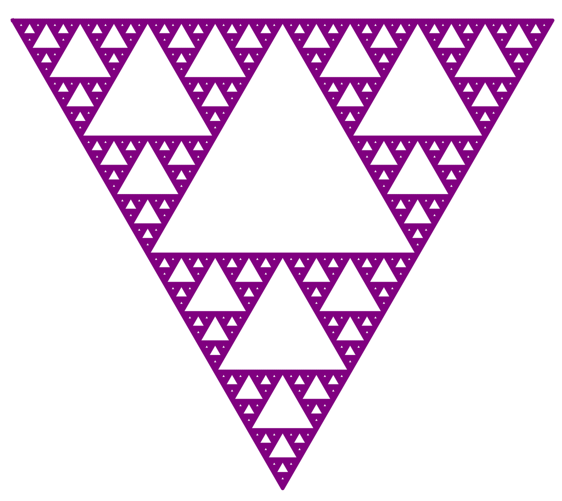
Le flocon de Von Koch inversé

On part de $F--F--F$ avec $F \to F-F++F-F$ avec un angle de 60°.



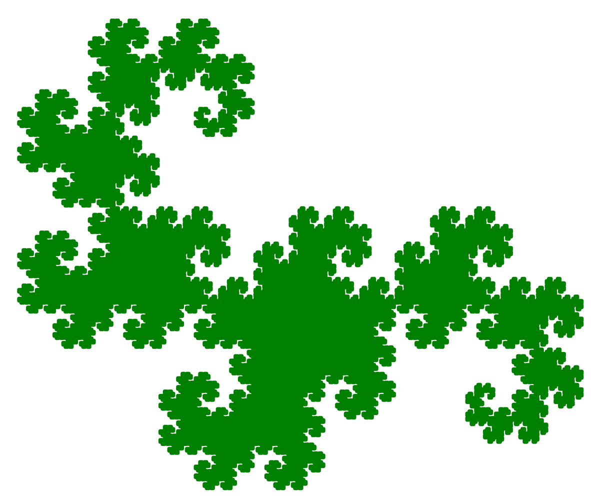
Le triangle de Serpinski

On part de $F-G-G$ avec $F \to F-G+F+G-F$ et $G \to GG$ avec un angle de 120°.



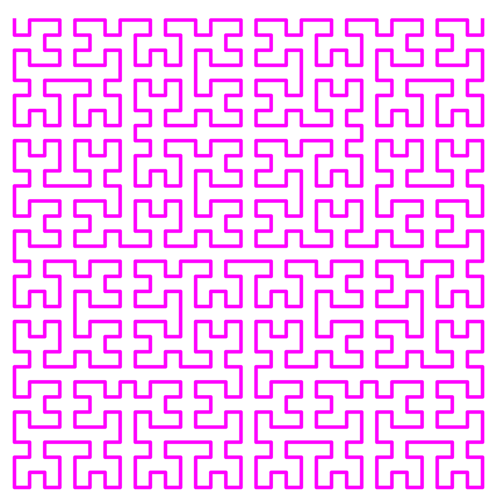
La courbe du dragon

On part de FA avec $F \to F$, $A \to A+BF+$ et $B \to -FA-B$ avec un angle de 90°.



La courbe de Hilbert

On part de A avec $F \to F$, $A \to -BF+AFA+FB-$ et $B \to +AF-BFB-FA+$ avec un angle de 90°.



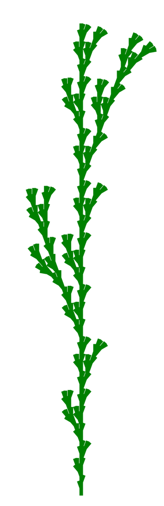
La courbe de Hilbert (qui est le cas limite du dessin ci-dessus) a été inventée par Hilbert en 1891 : il s'agit d'une courbe mathématiquement importante, puisqu'elle correspond à une application **continue** et **surjective** de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$, en d'autres termes, il s'agit d'une courbe qui remplit entièrement le carré $[0,1]^2$.

Cultivons des L-systèmes !

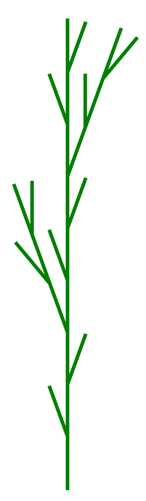
Lindenmayer a remarqué que, dans la nature, on retrouve plusieurs fois le même motif, mais à différentes échelles, dans les végétaux notamment. Cette propriété d'**autosimilarité** est une caractéristique importante de ce qu'on appelle les **fractales**. Cette propriété doit certainement se retrouver dans le code du système étudié : le **code génétique** du végétal, d'où l'idée informatique de génération de réécriture des L-systèmes, qui peuvent permettre de simuler la croissance des plantes.

Par exemple, le L-système partant de F avec $F \to FG$ et $G \to G$ qui désigne la suite F, FG, FGG, $FGGG$, ... désigne une plante constituée que d'une tige qui croît uniquement par sa base, alors que F avec $F \to GF$ et $G \to G$ simule une plante qui ne croît que par son sommet.

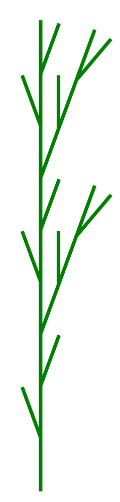
Mais, dans le cas général, il y a des **ramifications** de plus en plus complexes :



Informatiquement, on peut aller plus loin dans les **ressemblances avec la nature**. Par exemple, partons de :



Introduisons une mutation génétique dans son Adn ; un $+$ s'est aléatoirement transformé en $-$:



De même, on peut faire des croisements entre deux L-systèmes en choisissant une partie du code de l'un et en le remplaçant par une partie du code de l'autre.

Tel le jardinier avec ses plantes, l'informaticien peut, avec ses L-systèmes, faire des croisements, du bouturage, créer des espèces...