Les aiguilles de Buffon

Le principe

Sur un **sol parqueté** à l'aide de **lames verticales** et toutes de même largeur L, **on lance** N **aiguilles** identiques de longueur $\ell < L$ et on compte le nombre P de celles qui tombent sur une rainure.
On peut montrer qu'on a

$$\frac{P}{N} \approx \frac{2\ell}{\pi L}$$

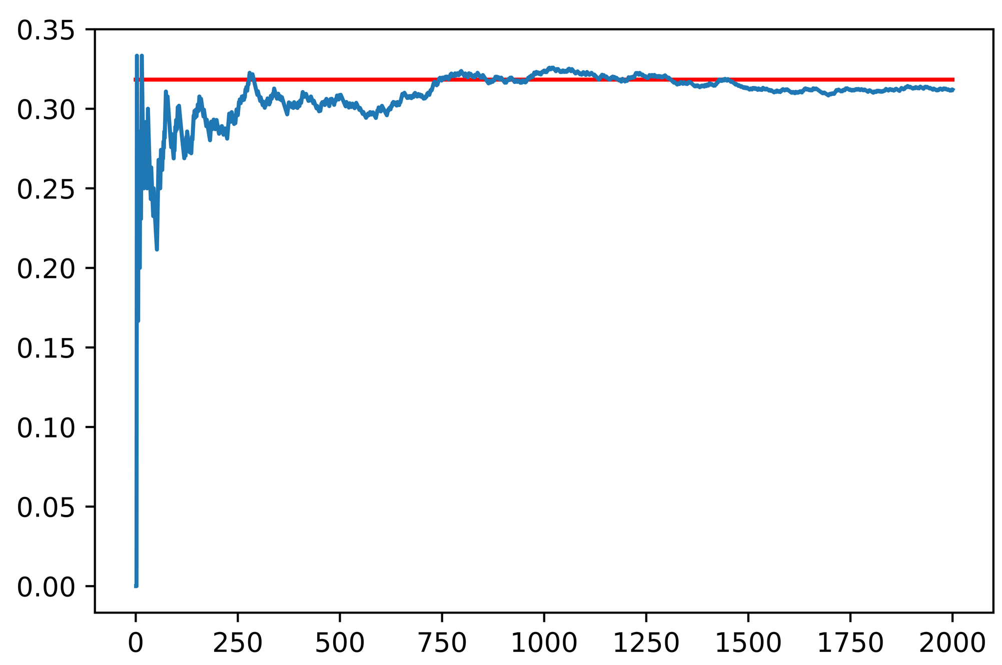
En particulier, en prenant $\ell = \frac{L}{2}$, on obtient

$$\frac{P}{N} \approx \frac{1}{\pi}$$

Ce qui permet de déterminer une **valeur approchée** de π !

Convergence ?

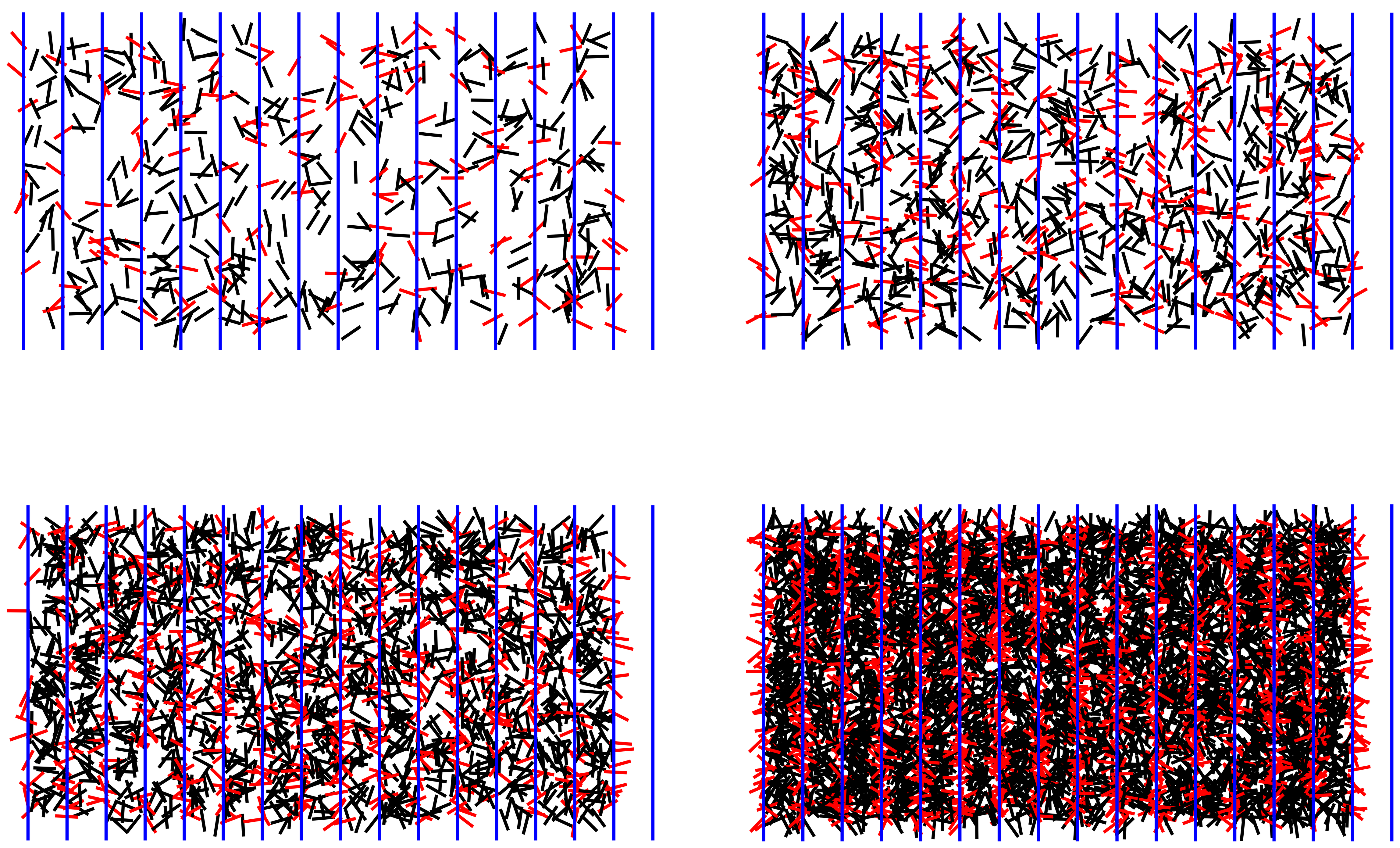
Lors du lancer des 2000 premières aiguilles du lancer de droite, on a calculé la **proportion** de celles qui sont tombées sur une rainure. La **valeur limite** attendue, $\frac{1}{\pi}$ est tracée en rouge.
En **abscisse** de ce graphique se trouve le nombre d'aiguilles lancées et, en **ordonnée**, la proportion d'aiguilles qui sont tombées sur une rainure du parquet.



Lançons des aiguilles !

Avec Python, on peut lancer rapidement 5000 aiguilles !

On lance 500 aiguilles, puis 1000, puis 2000 et enfin 5000. Les aiguilles qui intersectent deux lames de plancher sont en **rouge** et les autres sont en **noir**.



Dans cet exemple, réalisé avec Python, on a $\ell = \frac{L}{2}$.

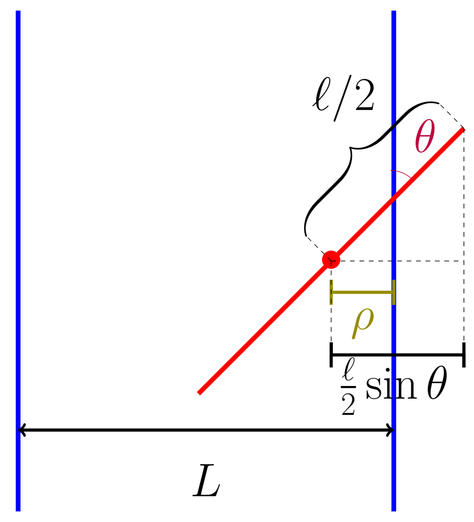
Qui est Buffon ?

Georges-Louis Leclerc (1707-1788), comte de Buffon, qui est à l'origine de ce problème était un naturaliste, philosophe et **mathématicien**. Initialement, il s'est intéressé au calcul de la probabilité qu'une **pièce de monnaie lancée en l'air** au-dessus d'une surface pavée par des carreaux tombe sur une rainure.

Explications

Modélisons le problème. On considère une aiguille et on note $\theta \in [0, \pi/2]$ **l'angle géométrique** qu'elle forme avec les rainures du parquet.

- **L'angle** θ est une variable aléatoire et suit une **loi uniforme** sur $[0, \pi/2]$.
- **La distance** ρ du milieu de l'aiguille à la rainure la plus proche est une variable aléatoire suit une **loi uniforme** sur $[0, L/2]$.



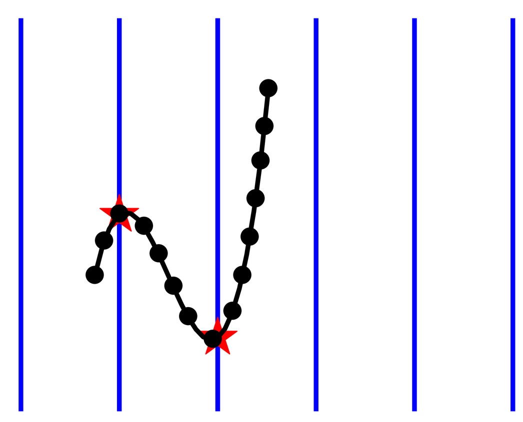
L'aiguille rencontre une rainure du parquet si et seulement si $\frac{\ell}{2}\sin\theta \geq \rho$.
Ainsi, la probabilité que l'aiguille tombe sur une rainure s'écrit sous **forme intégrale** et vaut

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}\sin\theta} \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \frac{2\ell}{\pi L}$$

En répétant de nombreuses fois l'expérience, **la loi des grands nombres** affirme que la **proportion** d'aiguilles qui rencontrent une rainure est proche de $\frac{2\ell}{\pi L}$.

Les spaghetti de Buffon

Considérons maintenant un **spaghetti** (c'est-à-dire un morceau de **courbe**) de longueur $\mathcal{C}$. On **découpe** ce spaghetti en K petits **segments** de droite de longueur ℓ.



Le cas des aiguilles nous dit que chacun de ces petits **segments** rencontre environ $\frac{2\ell}{\pi L}$ rainure et, ainsi, le spaghetti coupe les rainures environ $K.\frac{2\ell}{\pi L}$ fois. Comme $K\ell$ est environ égal à la longueur $\mathcal{C}$ du spaghetti, le **nombre** R **de rainures** rencontrées par le spaghetti est d'environ $\frac{2\mathcal{C}}{\pi L}$. Cela nous donne la **formule de** Barbier :

$$\mathcal{C} \approx \frac{R\pi L}{2}$$

En particulier, on voit que la **forme** du spaghetti n'intervient pas dans cette formule !

Théorème de Barbier

Un résultat remarquable !

Le périmètre d'une courbe fermée de largeur constante ℓ ne dépend pas de sa forme et vaut $\pi\ell$.
Une courbe fermée est de largeur constante lorsque la largeur, mesurée par la distance entre deux droites parallèles opposées qui lui sont tangentes, est la même quelle que soit l'orientation de ces droites.
Parmi ces courbes fermées, on a les cercles mais pas seulement ! Voici par exemple le triangle de Reuleaux qui est bien de largeur constante :