

MÉTHODE DE MONTE-CARLO

La méthode de Monte-Carlo ...

... est une méthode algorithmique qui permet de déterminer une valeur approchée de l'espérance d'une variable aléatoire. Il suffit de simuler un grand nombre de fois cette variable aléatoire et de faire la moyenne des valeurs obtenues. Selon un résultat - **la loi des grands nombres** - cette valeur est proche de $E(X)$.

C'est en fait assez **intuitif** au départ : si on souhaite déterminer la durée de vie moyenne d'une ampoule, il suffit d'en allumer un grand nombre, de noter combien de temps chacune d'elles reste allumée et de faire la moyenne des temps d'allumage des ampoules.

Cette même idée peut s'appliquer par exemple pour calculer des **valeurs approchées d'intégrales**, d'**aires** ou de **volumes**.

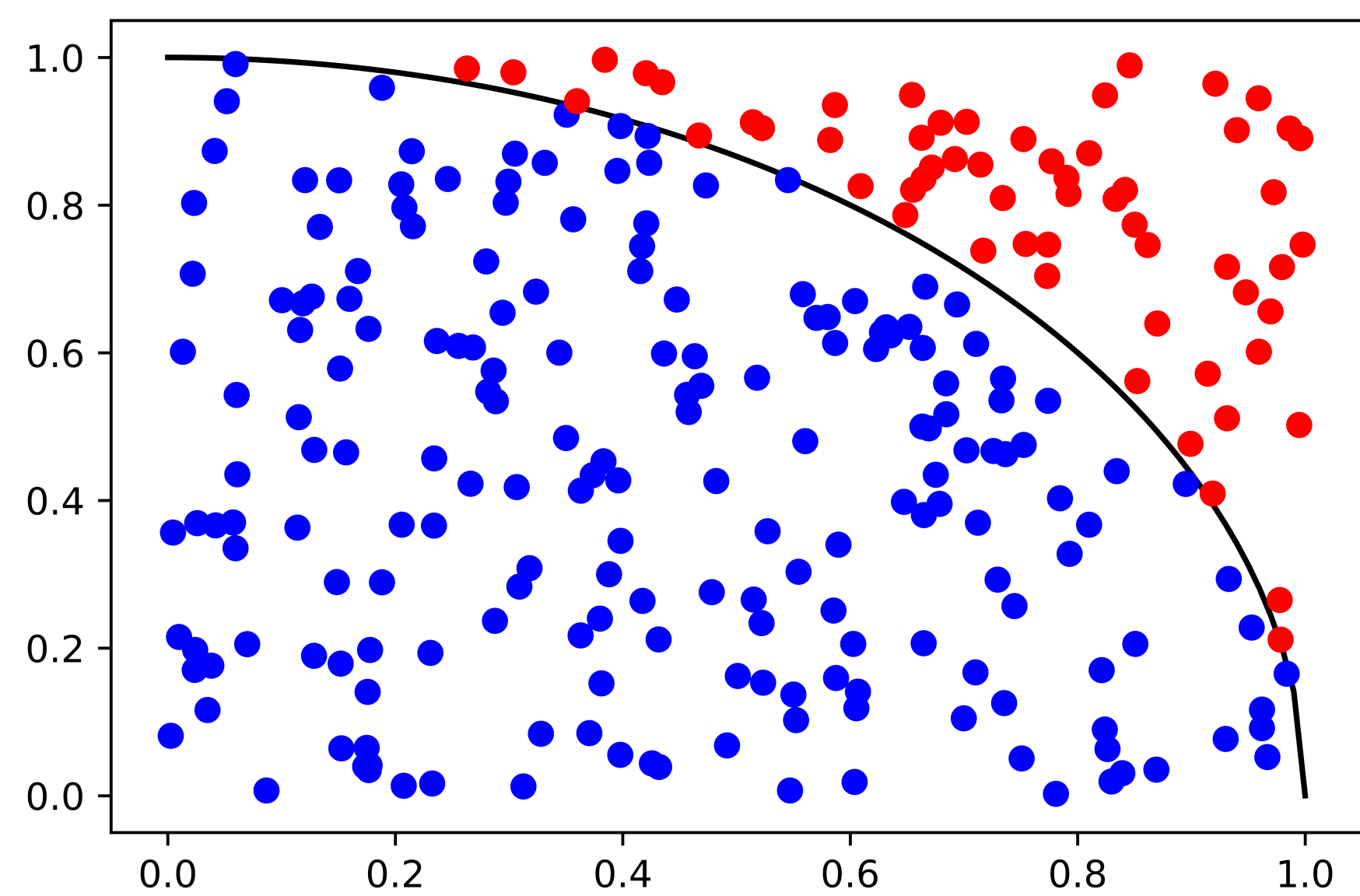
Calculons une intégrale

On cherche à déterminer une **valeur approchée** de

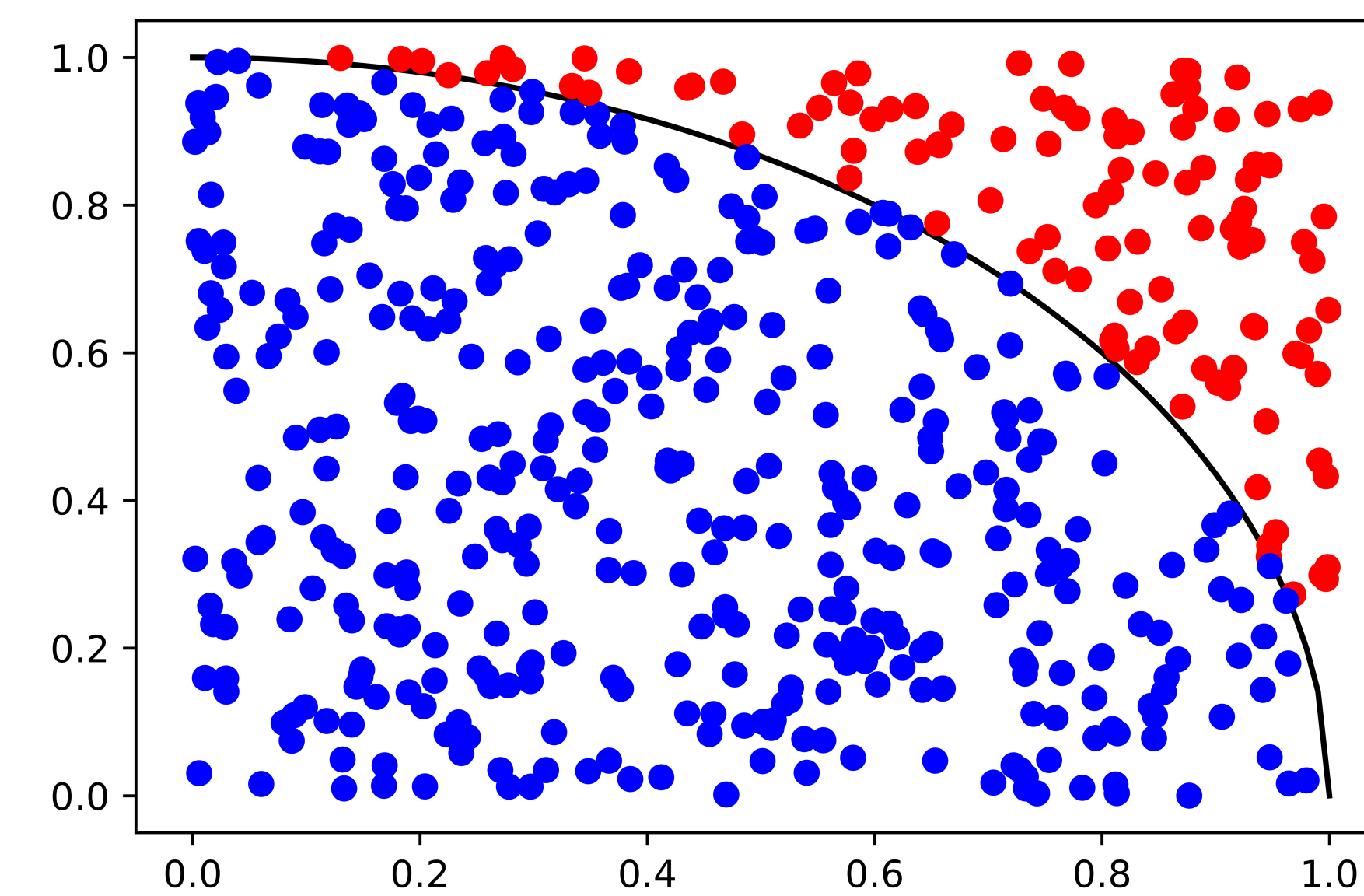
$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

On note Γ_f la partie du plan située sous la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ c'est-à-dire $\Gamma_f = \{(x, y) \in [0, 1]^2, y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. La méthode de MONTE-CARLO consiste à **générer des points au hasard** dans $[0, 1]^2$ et à déterminer la **proportion** p de ceux qui sont dans Γ_f . On a alors $I \approx p$.

Ici on a généré **250 points** et on obtient $p = 0.804$



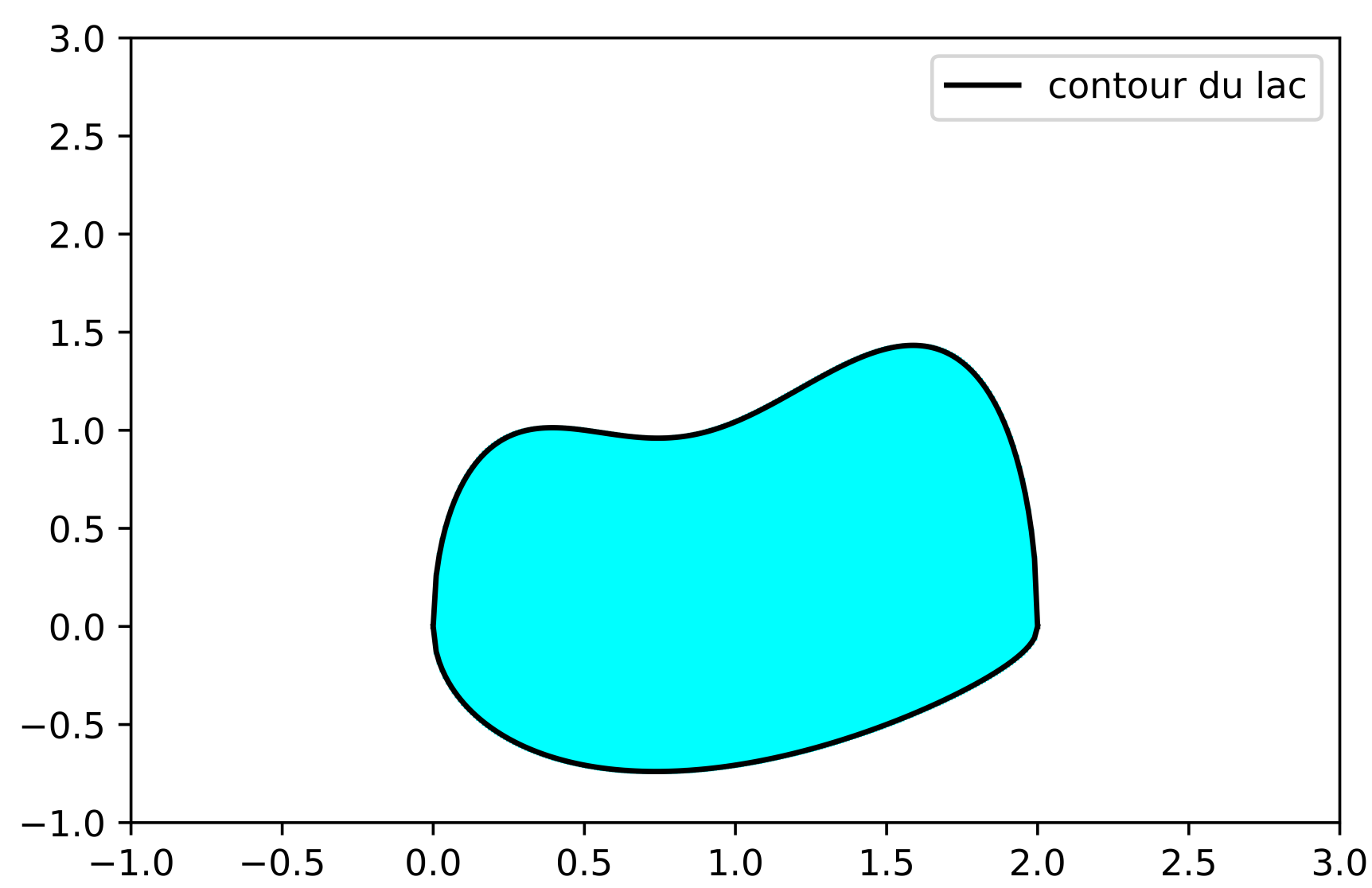
Ici on a généré **500 points** et on obtient $p = 0.796$



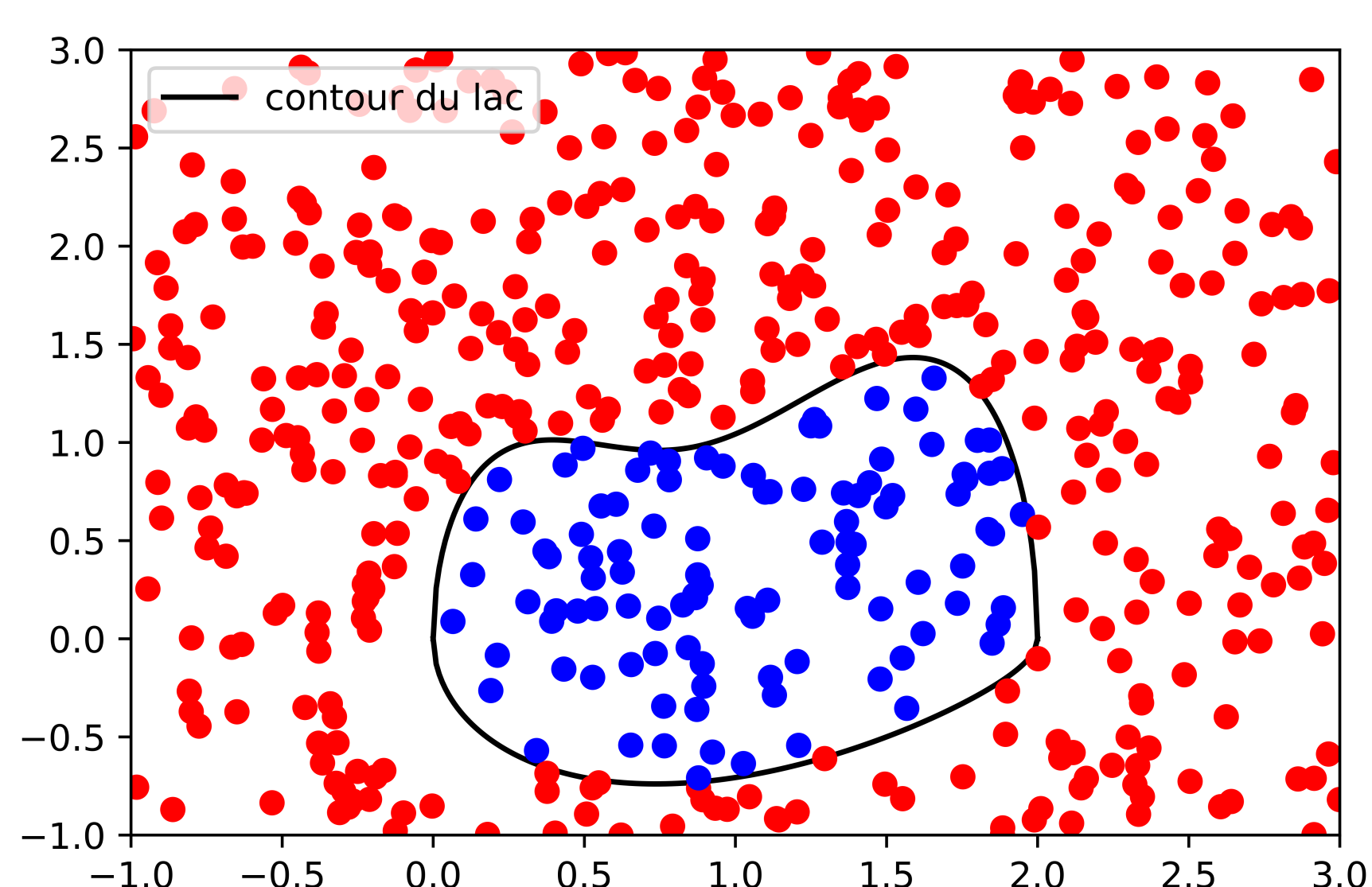
Mais au fait, ne sait-on pas déjà calculer cette intégrale ? Oui, bien sûr puisqu'il s'agit de l'aire d'un **quart du cercle** de centre O et de rayon 1. Elle vaut donc $\frac{\pi}{4} \approx 0.79$. En calculant l'intégrale par la méthode de MONTE-CARLO, on a donc déterminé une **valeur approchée** de π !

Calculer la surface d'un lac

Imaginons un **lac** dont on cherche à **calculer la superficie**. S'il a des contours un peu compliqué, il sera **difficile** de la calculer par une formule d'aire connue.



En générant 500 points aléatoirement dans une zone qui contient le lac (ici $[-1, 3]^2$ et disons par exemple que l'échelle est en km), on compte ceux qui se situent à l'intérieur du lac et on note c ce nombre. Une **valeur approchée de la superficie** du lac est alors $16 \cdot \frac{c}{500}$ km² (16 puisque la zone dans laquelle on a généré des points aléatoires est d'aire 16 km²).



Ici, la simulation donne la valeur de 3.3 km².

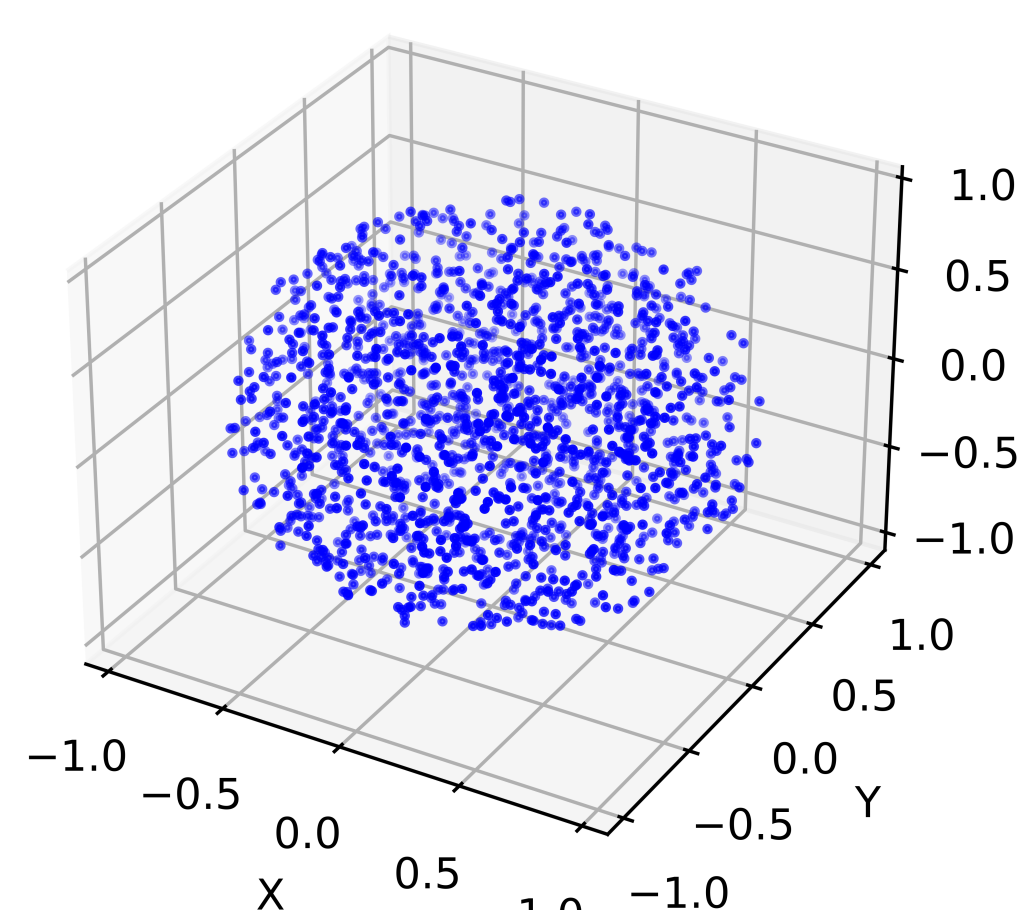
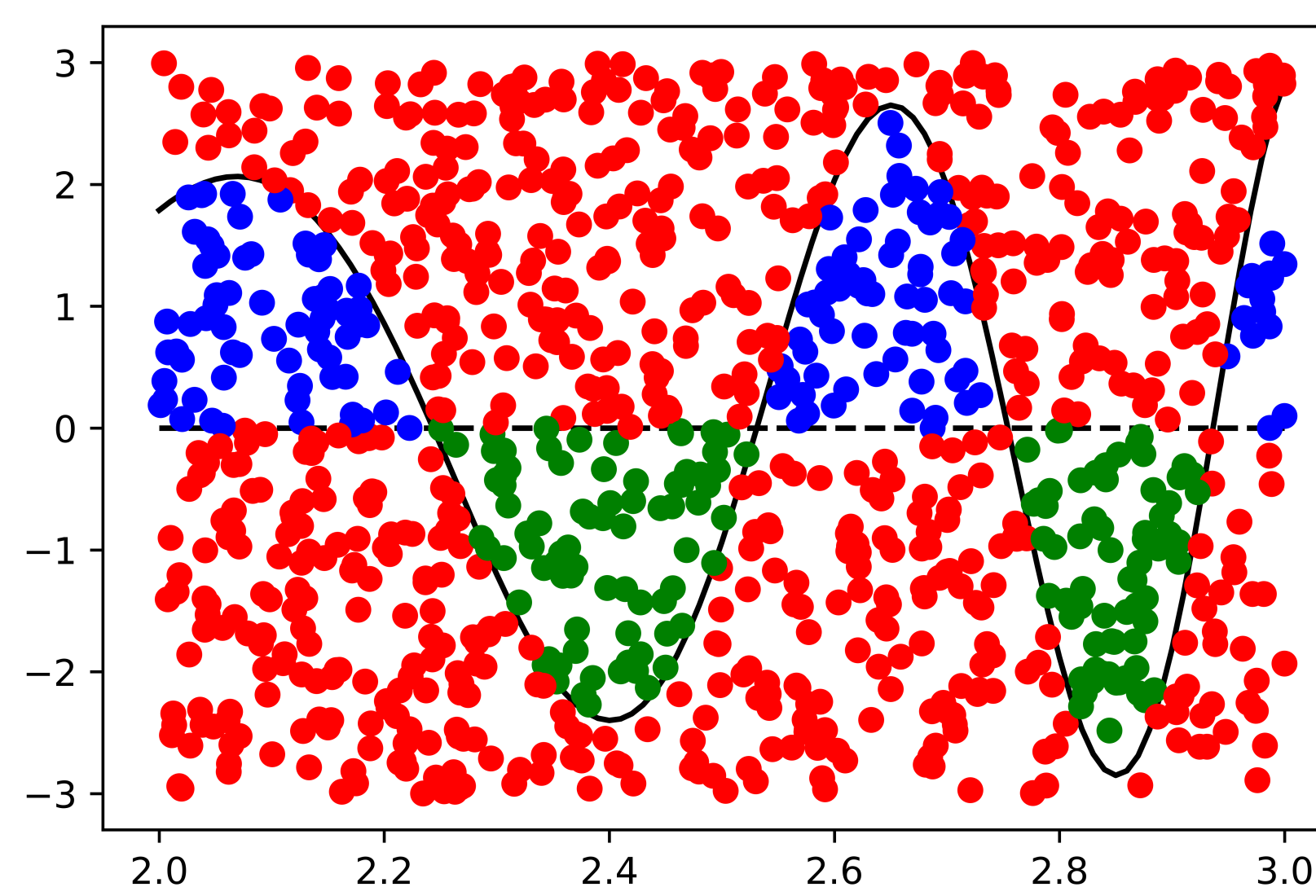
Une autre intégrale

Ici on cherche à calculer

$$J = \int_2^3 x \sin(e^x) dx$$

La fonction $x \mapsto x \sin(e^x)$ **n'est pas positive partout**. On adapte la méthode précédente : on génère N points au hasard dans $[2, 3] \times [-3, 3]$ (qui est d'aire égale à 6), on note c_1 le nombre de ceux qui se situent **en-dessous de la courbe** et au-dessus de l'axe des abscisses et c_2 le nombre de ceux qui se situent **au-dessus de la courbe** et en-dessous de l'axe des abscisses. On a alors

$$J \approx 6 \left(\frac{c_1}{N} - \frac{c_2}{N} \right)$$



Explications

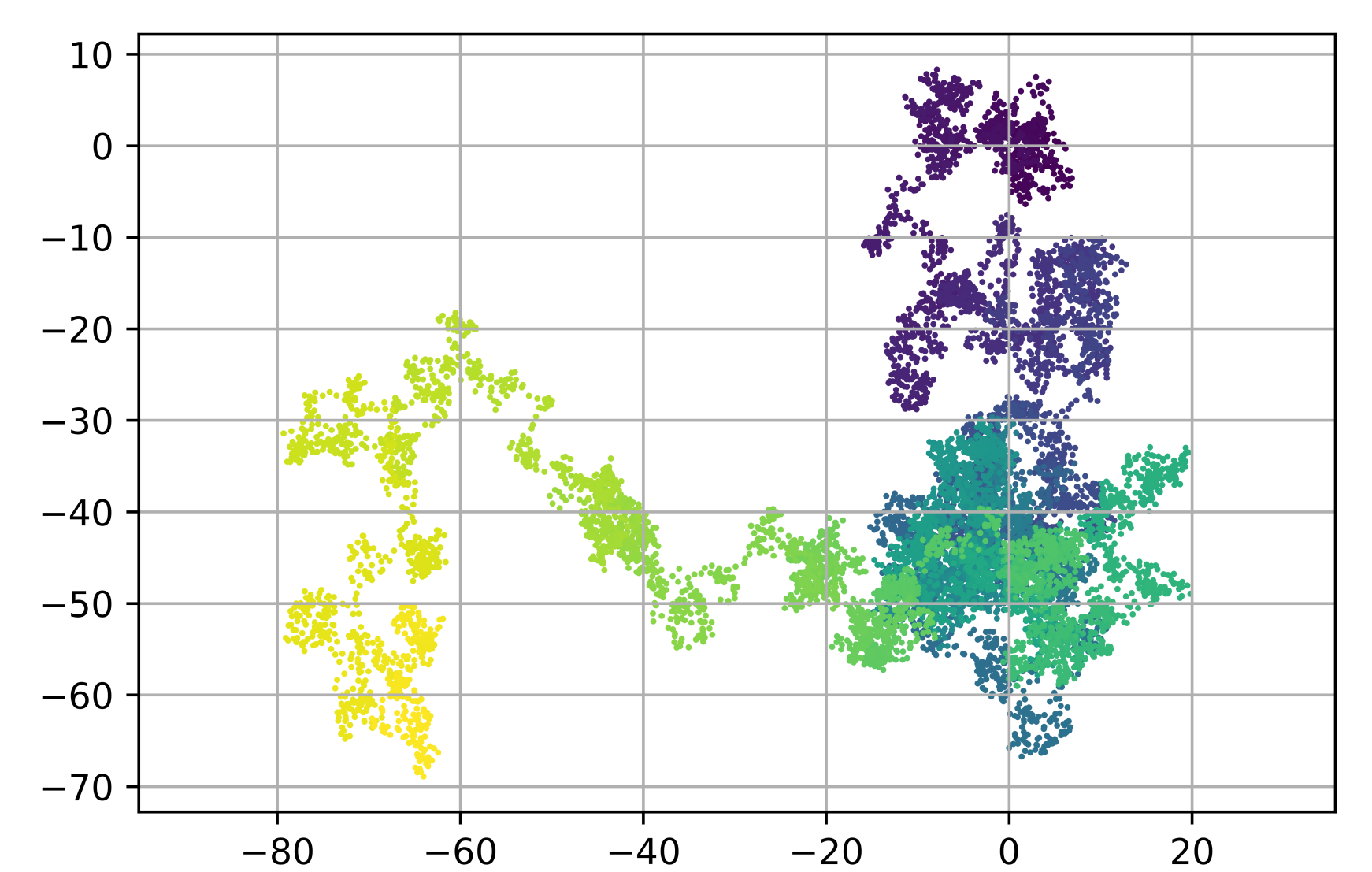
On génère un point au hasard dans $[0, 1]^2$ et on note $X = 1$ si ce point est dans Γ_f et 0 sinon. X suit alors une loi de **BERNOULLI** de paramètre I (puisque I est l'aire de Γ_f et que $[0, 1]^2$ est d'aire 1).

En générant X de **nombreuses fois** et de façon indépendante, la moyenne obtenue est **proche** de $E(X)$ qui vaut précisément I .

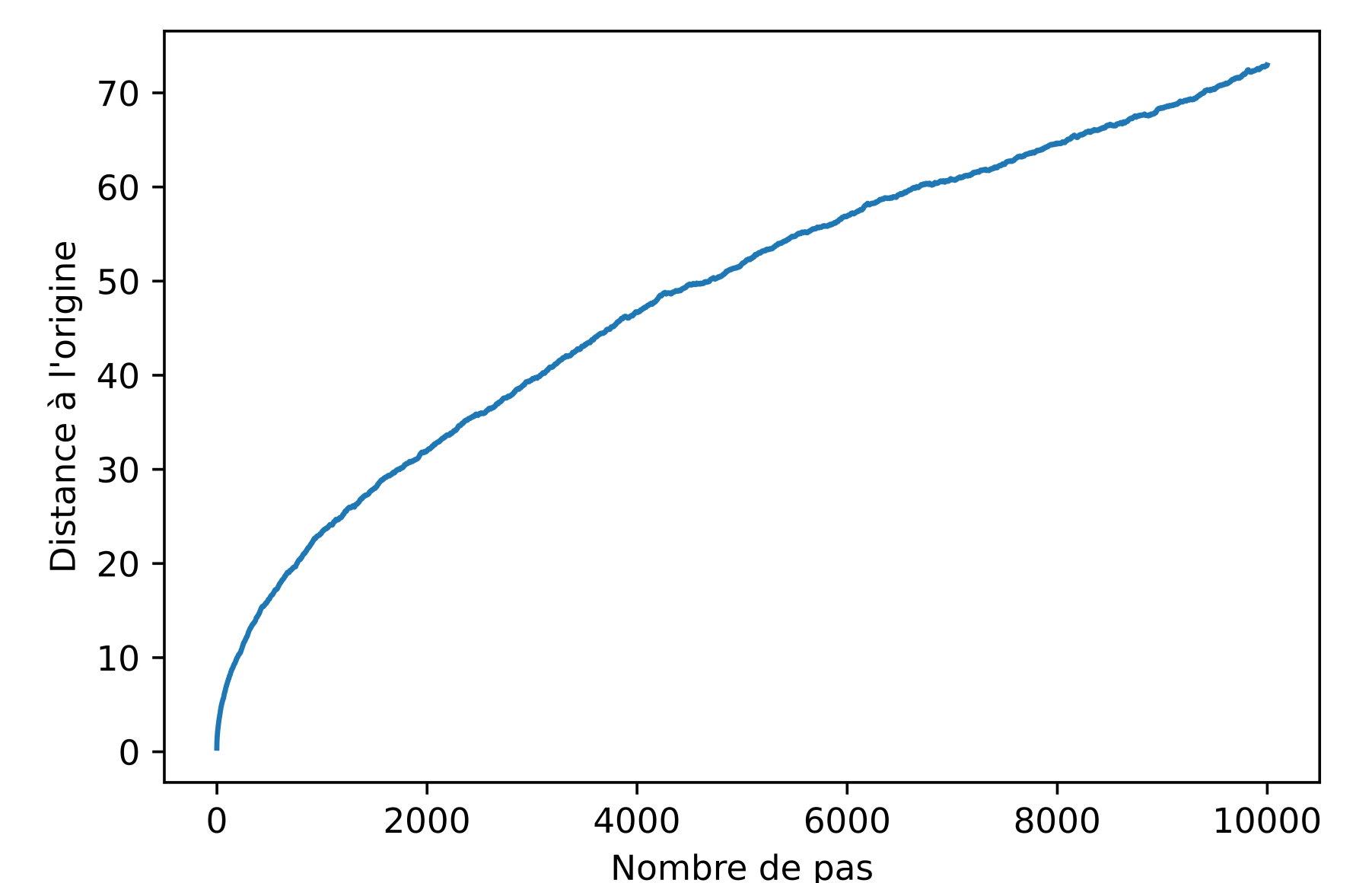
Plus on va générer de points au hasard et plus l'approximation va être intéressante.

Marche aléatoire

On considère une **personne distraite**, qui, partant de son domicile **se déplace au hasard**. A chaque instant, ce marcheur distraité se déplace d'une distance comprise entre 0 et 1 mètre horizontalement et verticalement. Sa trajectoire est une **marche aléatoire**. Sur cette image, on a placé son domicile en $(0, 0)$ et, afin de bien visualiser le sens de sa trajectoire, ses premiers pas sont en violet foncé puis, au fur et à mesure des pas, les couleurs s'éclaircissent. Le marcheur a fait ici 10000 pas. A la fin de la simulation, notre marcheur distraité se trouve donc dans la zone jaune à environ 60 mètres à l'ouest et 70 mètres au sud de son point de départ.



On cherche à estimer la **distance moyenne au point de départ** après N itérations. Pour l'obtenir, on simule un grand nombre de marches aléatoires (ici 1000), puis on calcule la moyenne des distances obtenues.



Volume de la sphère

En simulant 5000 points aléatoirement dans $[-1, 1]^3$, on trouve 4.17, ce qui est proche de la valeur attendue : $\frac{4}{3}\pi \approx 4.19$.