Nœuds

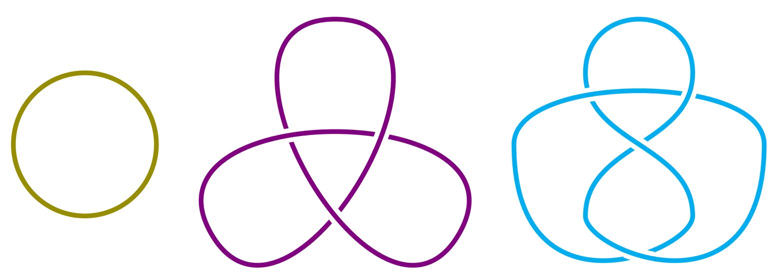
Définition

Un nœud est une **ficelle nouée**. En maths, souvent, on aime bien recoller les deux bouts de la ficelle pour obtenir une courbe "fermée".

De façon très formelle, un **nœud** est la **courbe représentative** d'une fonction f définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, injective et telle que $f(0) = f(1)$. C'est donc un objet qui vit dans $\mathbb{R}^3$.

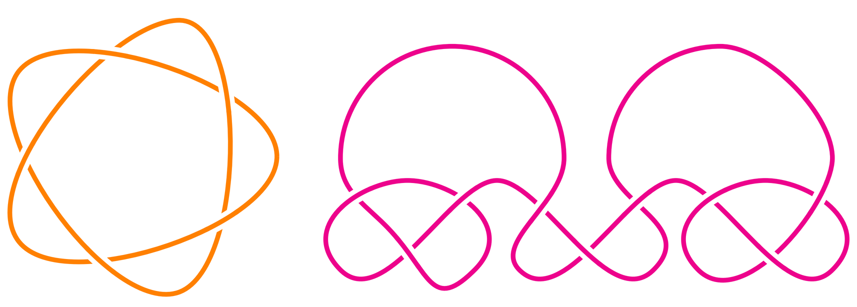
Pour les **représenter**, on **projette** ces courbes représentatives dans le plan en indiquant bien, au niveau de chaque intersection, quels sont les brins qui sont "devant". Cette représentation s'appelle un **diagramme de nœud**.

En voici quelques-uns dont certains sont très connus ! En olive, c'est le ① **nœud trivial**, en violet, il s'agit du ② **nœud de trèfle**, en bleu, c'est le ③ **nœud de huit**, en vert, on reconnaît le ④ **nœud plat** et en marron, on a le ⑤ **nœud de double huit**.



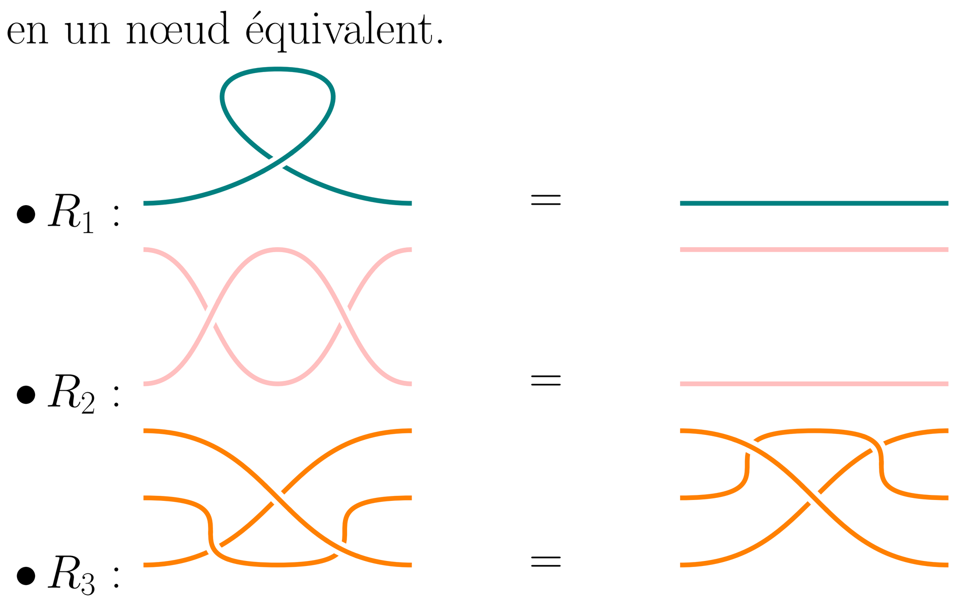
① ② ③

④ ⑤



Mouvements de Reidemeister

Il s'agit de 3 déformations locales transformant un nœud en un nœud équivalent.



Le **théorème** de Reidemeister (mathématicien allemand, 1893 - 1971), établi en 1926, dit que deux nœuds sont équivalents **si et seulement si** l'on peut passer de l'un à l'autre par une **suite de mouvements** R_1, R_2 et R_3.

Recherches sur les nœuds

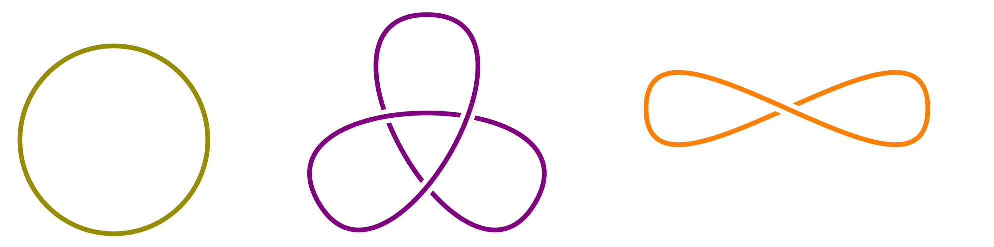
- 1860 : Gauss est le premier à s'intéresser aux nœuds.
- 1890 : Peter Guthrie Tait fait une première **classification** des "petits" nœuds premiers. Cela lui a pris 20 ans !
- 1949 : Horst Schubert montre que tout nœud est le produit de nœuds premiers.
- 1969 : John Conway **répertorie** tous les nœuds dont le nombre de croisements est ≤ 11.
- 1984 : Vaughan Jones introduit le **polynôme** de Jones. Cela lui vaudra la médaille Fields en 1990.

Deux nœuds égaux ?

On considère deux nœuds N_1 et N_2. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalents** (on dit aussi **égaux**) si l'on peut déformer l'un pour obtenir l'autre. C'est une **question difficile**.

En particulier, savoir si l'on peut **défaire un nœud**, c'est déterminer s'il est égal au nœud trivial.

- Ces trois nœuds sont **égaux** :



Attention : le nœud central **n'est pas** le **nœud de trèfle**.

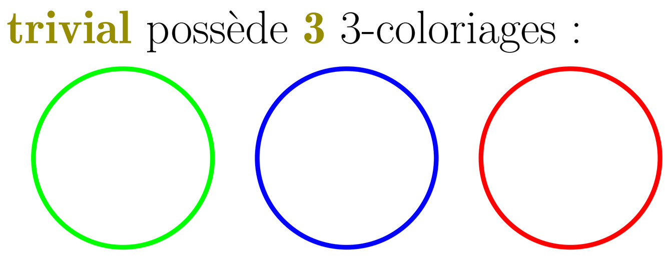
- Le **nœud de double huit** et le **nœud de trèfle** sont égaux.
- Les nœuds suivants sont **égaux** (mais cela n'est pas simple à voir) :

Coloriage de nœuds

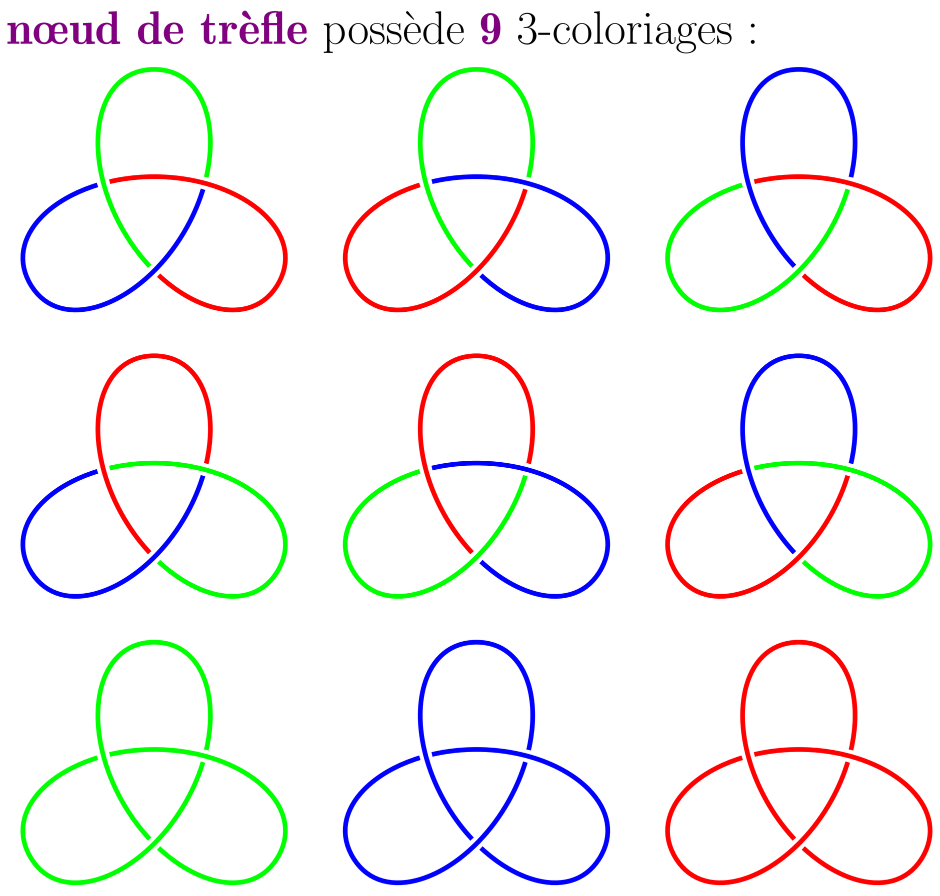
Le 3-**coloriage** d'un nœud est un coloriage respectant les règles suivantes :

- Les **changements de couleur** ne peuvent se faire qu'au niveau d'un croisement.
- Chaque **croisement** ne contient qu'une seule couleur ou contient les 3 couleurs.

Le **nœud trivial** possède **3** 3-coloriages :



Le **nœud de trèfle** possède **9** 3-coloriages :



Le nombre de 3-coloriages est un **invariant** de nœuds c'est-à-dire que **deux nœuds égaux possèdent autant de 3-coloriages**.

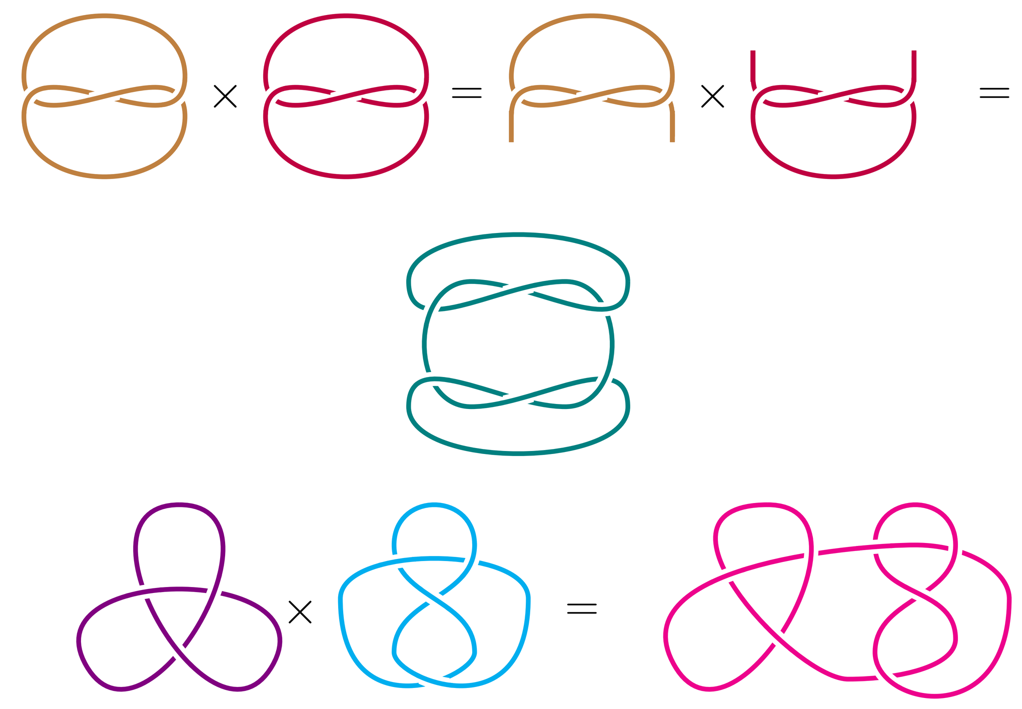
Ceci permet par exemple de montrer que le **nœud trivial** n'est pas égal au **nœud de trèfle** autrement dit, on ne peut pas dénouer le **nœud de trèfle**.

Cependant, deux nœuds peuvent avoir le même nombre de 3-coloriages et ne pas être égaux.
En effet, le **nœud de huit** a autant de 3-coloriages que le **nœud de trivial** alors qu'ils ne sont pas égaux.

Il existe d'autres invariants plus efficaces mais plus compliqués à introduire comme le **polynôme** de Jones.

Multiplier des nœuds

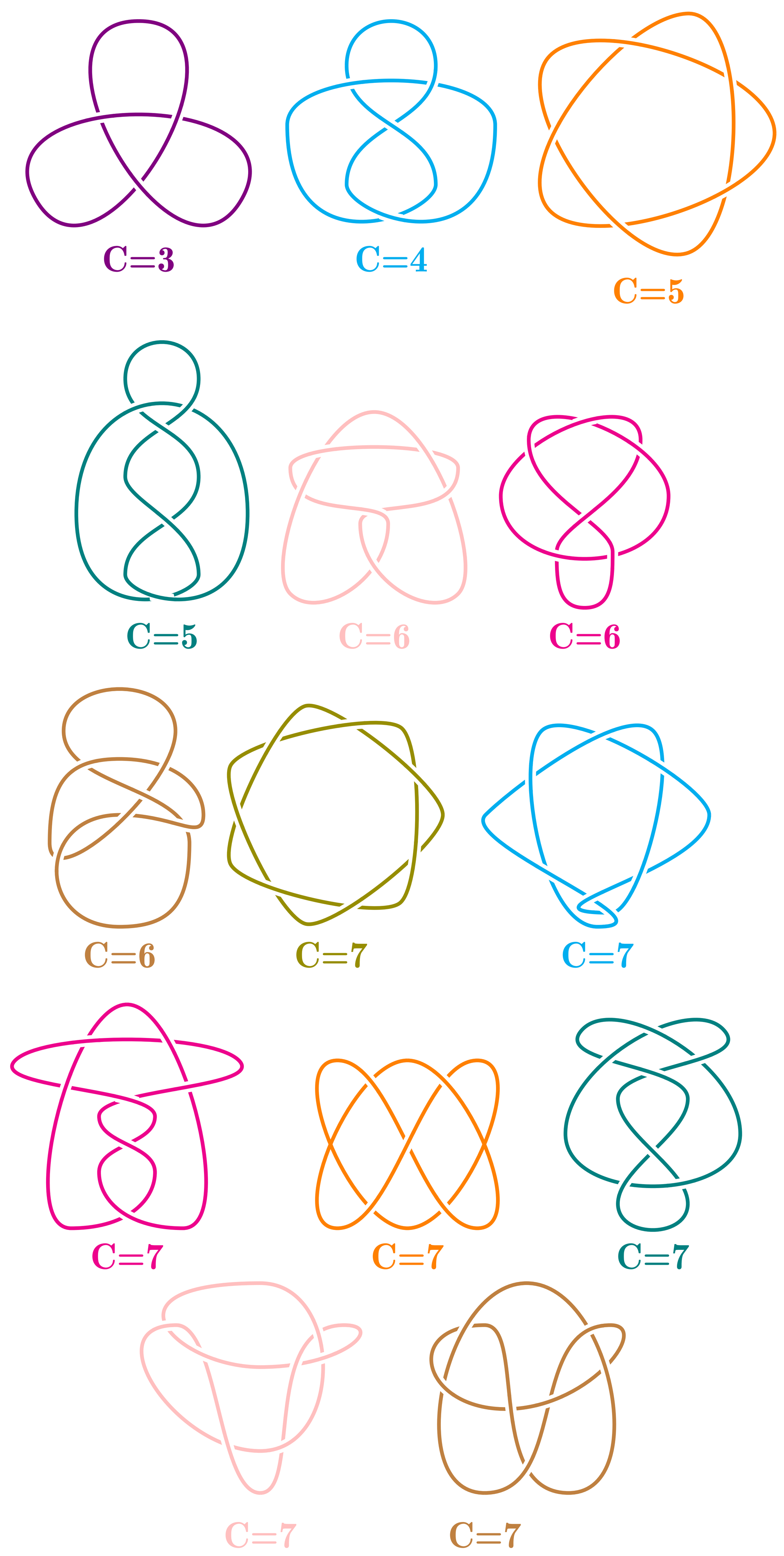
Multiplier deux nœuds, c'est les mettre bout à bout. On procède ainsi :



Nœuds premiers

Un nœud est dit **premier** s'il n'est pas égal à un produit $N_1 \times N_2$ avec N_1 et N_2 non triviaux.

Voici les **nœuds premiers** pour lesquels il existe une représentation dont le nombre **C** de croisements est ≤ 7.



Comme en **arithmétique**, on a le résultat suivant : tout nœud peut se **décomposer de façon unique** en un produit de nœuds premiers.

Comme pour les entiers, la **décomposition effective** d'un nœud en produit de nœuds premiers est une question difficile.

Comme on l'a vu avant, le **nœud plat** est le produit de deux **nœuds de trèfle** et cela est donc sa décomposition en produit de nœuds premiers.

Table des premiers nœuds premiers.