Courbes paramétrées

Elles sont partout!

Courbe paramétrée

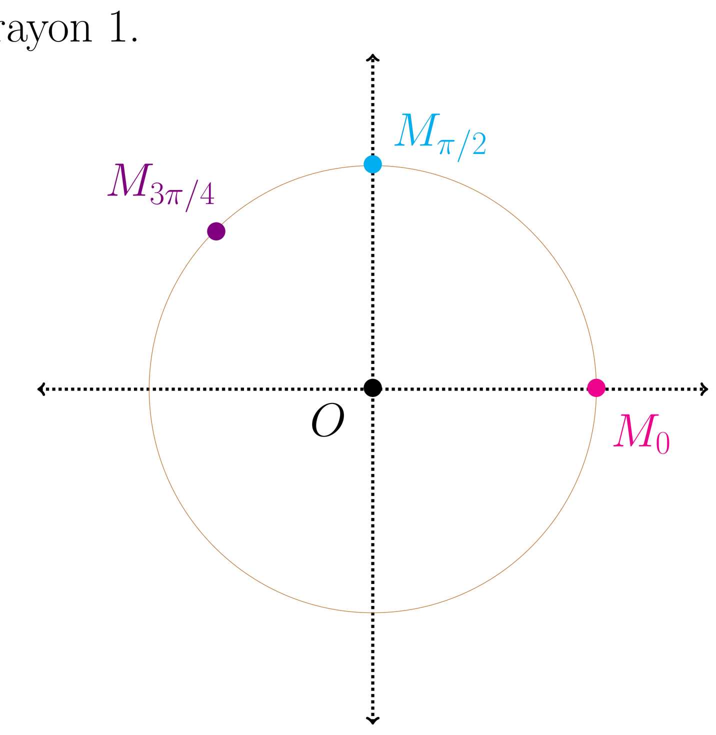
On travaille ici dans le plan qu'on a muni d'un repère orthonormé dont l'origine est notée O et la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x et y deux fonctions $I \to \mathbb{R}$. Lorsqu'on choisit $t \in I$, le couple $(x(t), y(t))$ peut être interprété comme étant le couple des coordonnées d'**un point** du plan qu'on notera M_t. En faisant varier t, M_t décrit une courbe : on dit que c'est la courbe paramétrée d'équation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Par exemple, si on considère

$$\begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \end{array}$$

on obtient le **cercle** de centre O et de rayon 1.



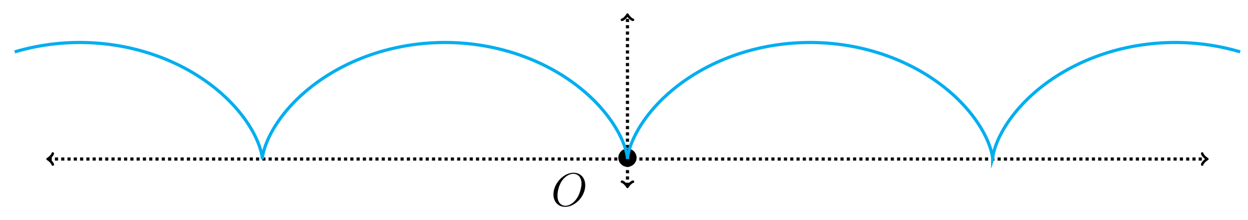
À $t = 0$, le point est en $(1, 0)$, à $t = \frac{\pi}{2}$, il est en $(0, 1)$, ...

Ce qui est troublant c'est que t n'est **pas** vraiment **visible** sur le graphique.

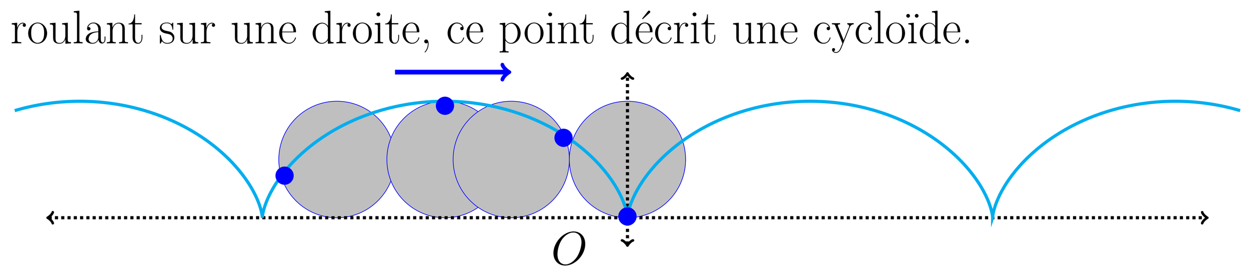
Des courbes célèbres

La **cycloïde** est la courbe paramétrée d'équations

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$



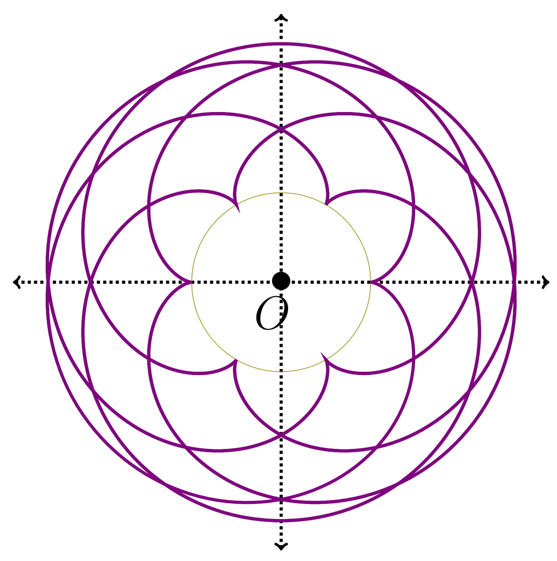
Si on fixe un point d'un cercle (la **valve d'une roue de vélo**) de rayon 1 roulant sur une droite, ce point décrit une cycloïde.



En faisant rouler un cercle à l'**extérieur** du cercle de centre O et de rayon 1, on obtient les **épicycloïdes**. Elles ont pour équations

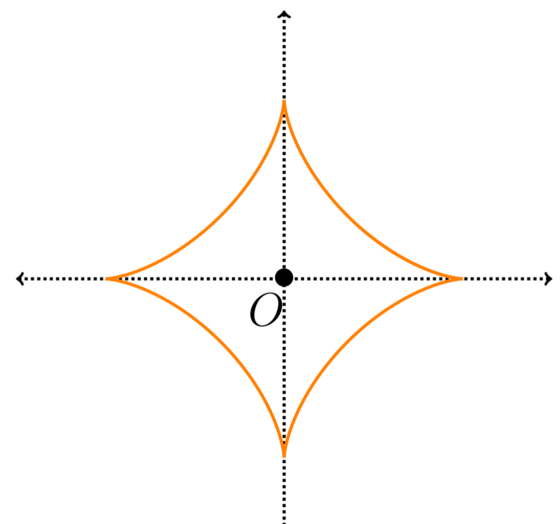
$$\begin{cases} x = (1+r)\cos t - r\cos\left(\left(\frac{1}{r}+1\right)t\right) \\ x = (1+r)\sin t - r\sin\left(\left(\frac{1}{r}+1\right)t\right) \end{cases}$$

où r est le rayon du cercle qui roule à l'extérieur.

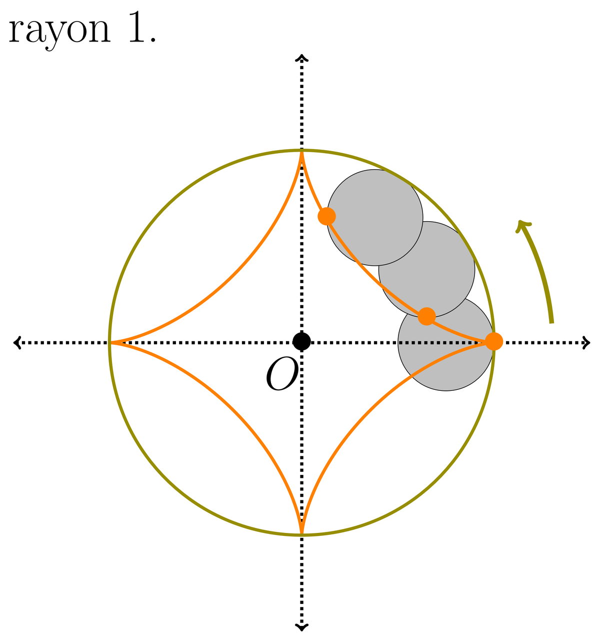


L'**astroïde** est la courbe paramétrée d'équations

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$



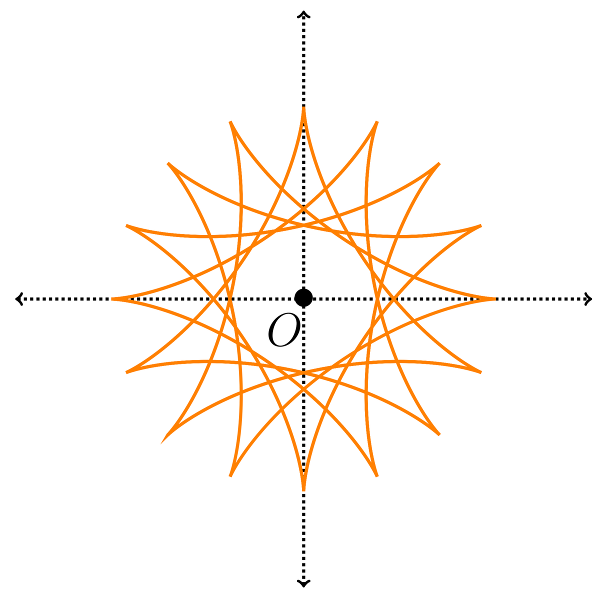
C'est la courbe du "carreau" des **jeux de cartes**, c'est aussi celle de la **porte du bus** qui se ferme ou encore celle de l'échelle qui glisse le long d'un mur et, enfin, c'est aussi la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon $1/4$ roulant à l'**intérieur** du cercle de centre O et de rayon 1.



Elle fait donc partie de la famille des **hypocycloïdes** dont les équations générales sont

$$\begin{cases} x = (1-r)\cos t + r\cos\left(\left(\frac{1}{r}-1\right)t\right) \\ x = (1-r)\sin t - r\sin\left(\left(\frac{1}{r}-1\right)t\right) \end{cases}$$

En faisant varier le rayon du cercle qui roule à l'intérieur du grand cercle, on obtient d'autres **hypocycloïdes**. Ici le petit cercle a un rayon de $5/16$.



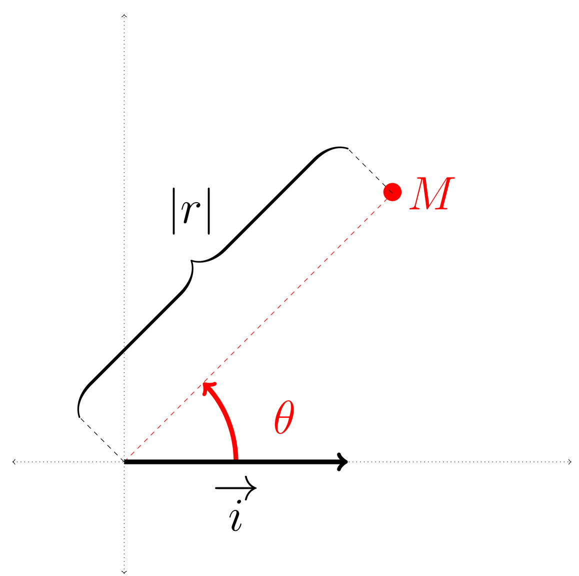
Coordonnées : cartésiennes vs polaires

Si M est un point du plan, on peut le repérer par ses coordonnées cartésiennes que nous noterons ici (x, y). Il existe d'autres façons de repérer ce point M : par exemple à l'aide de ses **coordonnées polaires**.

Si (r, θ) est un couple de réels, on dit que ce sont des **coordonnées polaires** de M si on a

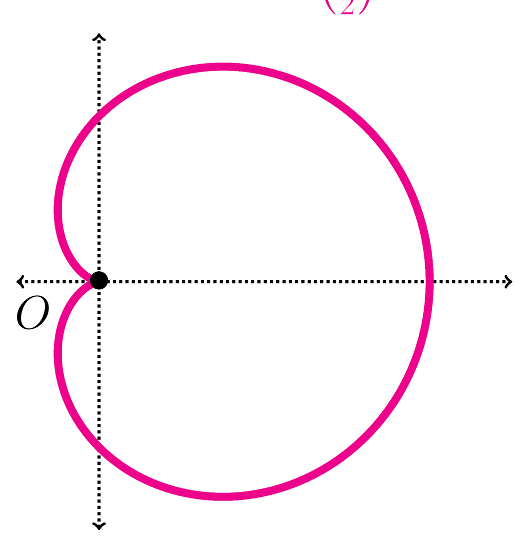
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Ces réels se visualisent bien et on a toujours $OM = |r|$. Lorsque $r > 0$, θ est une mesure de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Contrairement aux coordonnées cartésiennes, on n'a pas unicité des coordonnées polaires. Par exemple, $(1, \frac{\pi}{4})$ et $(-1, \frac{5\pi}{4})$ sont des coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(1, 1)$.



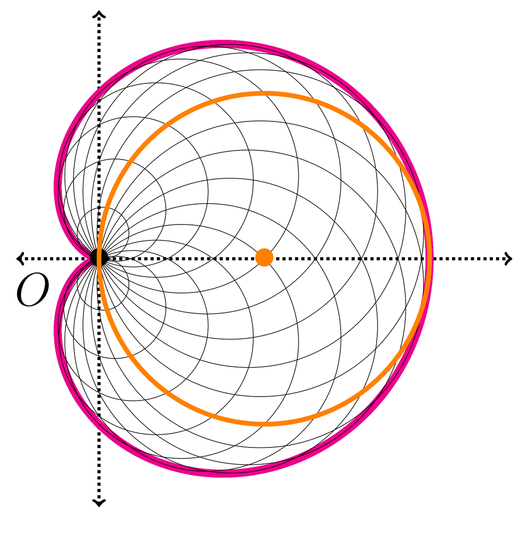
La cardioïde...

... est la courbe d'équation polaire $r = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.



C'est la courbe qui apparaît dans une **casserole de lait** et c'est aussi un cas particulier d'**épicycloïde** (avec $r = 1$).

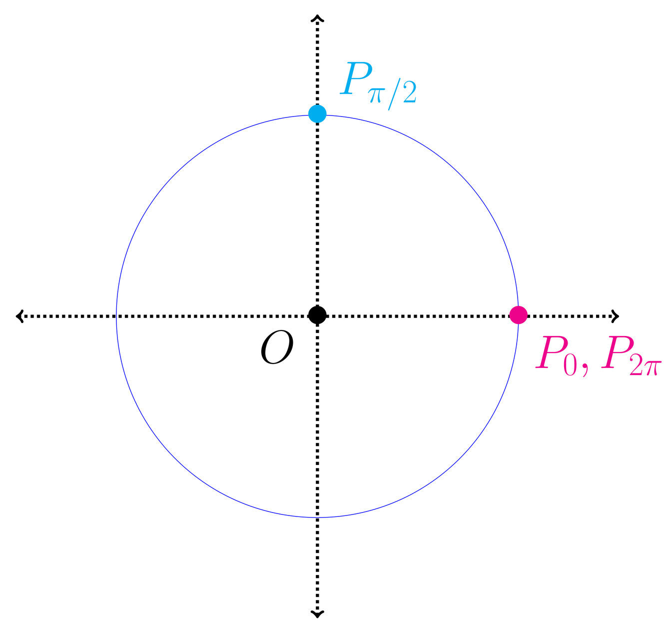
Si on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, traçons alors, pour N parcourant $\mathcal{C}$, tous les cercles de diamètre $[0, N]$. L'**enveloppe** de ces cercles est la cardioïde.



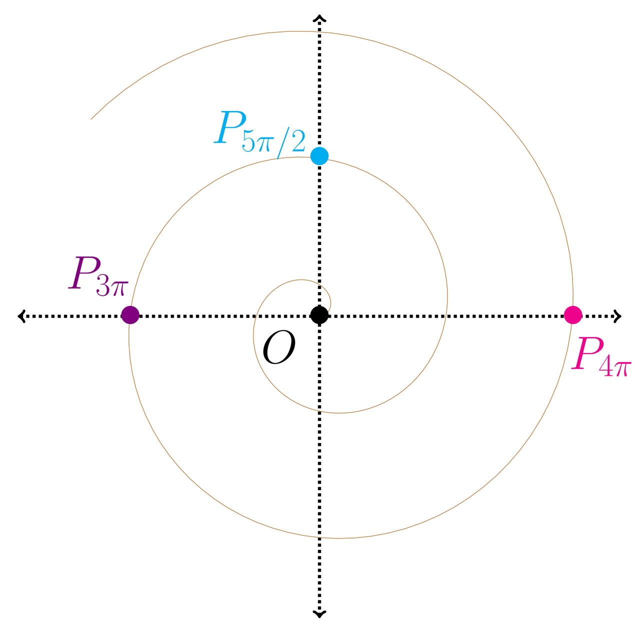
Courbes paramétrées en polaires

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $r : I \to \mathbb{R}$, pour $\theta \in I$, on s'intéresse au point P_θ de coordonnées polaires $(r(\theta), \theta)$ (c'est-à-dire de coordonnées cartésiennes $(r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$). Lorsque θ varie, P_θ décrit une courbe : on dit que c'est la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$.

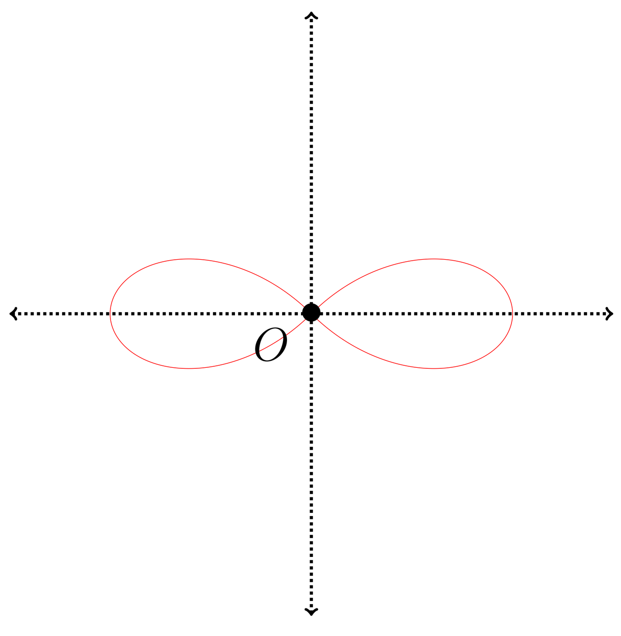
La courbe d'équation polaire $r = 1$ est le **cercle** de centre O et de rayon 1.



La courbe d'équation polaire $r = \frac{\theta}{10}$ est une **spirale**.



La courbe d'équation polaire $r^2 = \cos(2\theta)$ est la **lemniscate** de Bernoulli.



La courbe d'équation polaire $r = \cos\left(\frac{9\theta}{4}\right)$: est une jolie **rosace**.