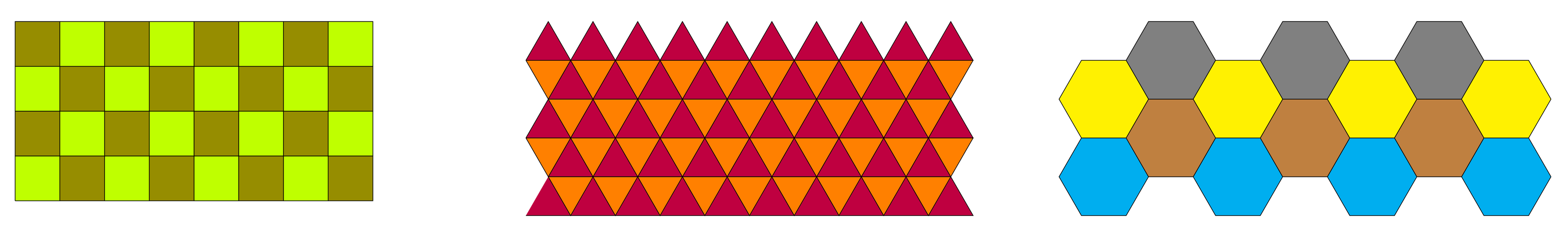
Des pavages

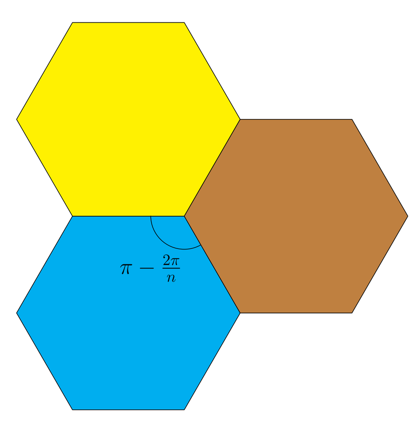
Des pavages périodiques

Il existe seulement 3 pavages du plan avec des tuiles toutes **identiques à un même polygone régulier** et assemblées bord à bord :



(4,4,4,4) (3,3,3,3,3,3) (6,6,6)

En effet, considérons un pavage réalisé à partir de **polygones réguliers** à n côtés. On sait que dans un polygone régulier à n côtés, chaque angle au sommet a pour mesure $\pi - \frac{2\pi}{n}$.



Notons alors r le nombre de polygones autour de chaque sommet du pavage (r est appelé l'ordre du pavage), on a

$$r\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi$$

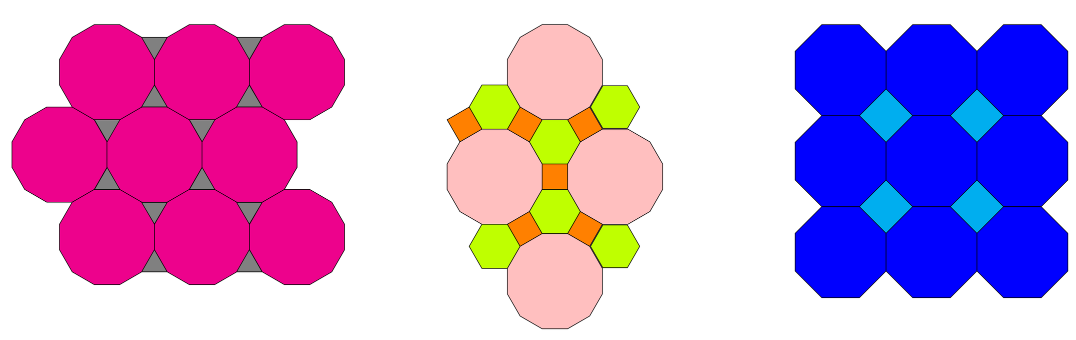
c'est-à-dire $r\frac{n-2}{n} = 2$. Or, $\frac{n-2}{n} \geq \frac{1}{3}$ donc

$$r \leq 6.$$

Finalement, les seules possibilités sont : $r = 6$ et $n = 3$, $r = 4$ et $n = 4$ et $r = 3$ et $n = 6$. Cela correspond bien aux dessins et ce qu'on écrit par exemple dans le troisième cas $(6, 6, 6)$ pour décrire que **chaque sommet est entouré de** 3 **polygones** et que ceux-ci sont des **hexagones**.

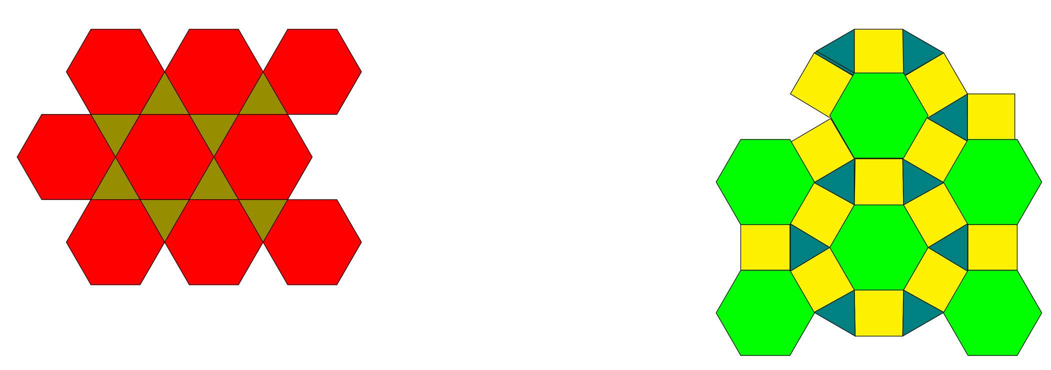
On peut montrer qu'en plus de ces 3 pavages, il existe 8 pavages **semi-réguliers** c'est-à-dire utilisant au moins deux polygones réguliers mais tels que la **configuration autour de chaque sommet soit toujours la même**.

★ Il y en a 3 d'ordre 3 :



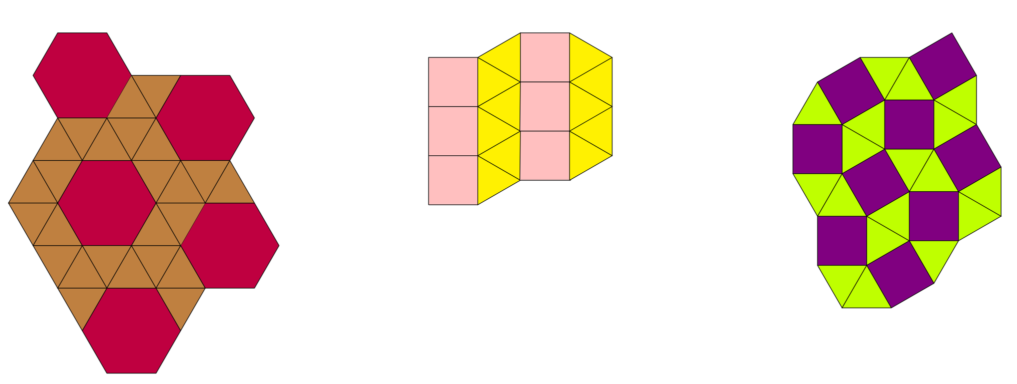
(3,12,12) (4,6,12) (4,8,8)

★ Il y en a 2 d'ordre 4 :



(3,6,3,6) (3,4,6,4)

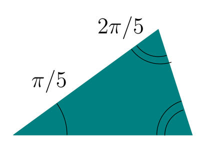
★ Il y en a 3 d'ordre 5 :

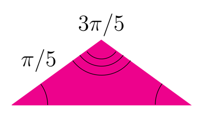


(3,3,3,3,6) (3,3,3,4,4) (3,3,4,3,4)

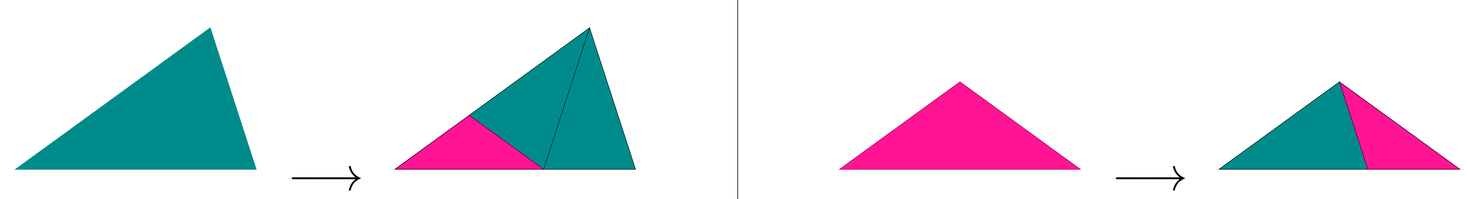
Pavages de Penrose

Ce sont des pavages non périodiques.

On dispose de deux triangles de base 

(★) et 

(•) qu'on découpe de la façon suivante à chaque étape :

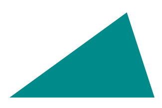


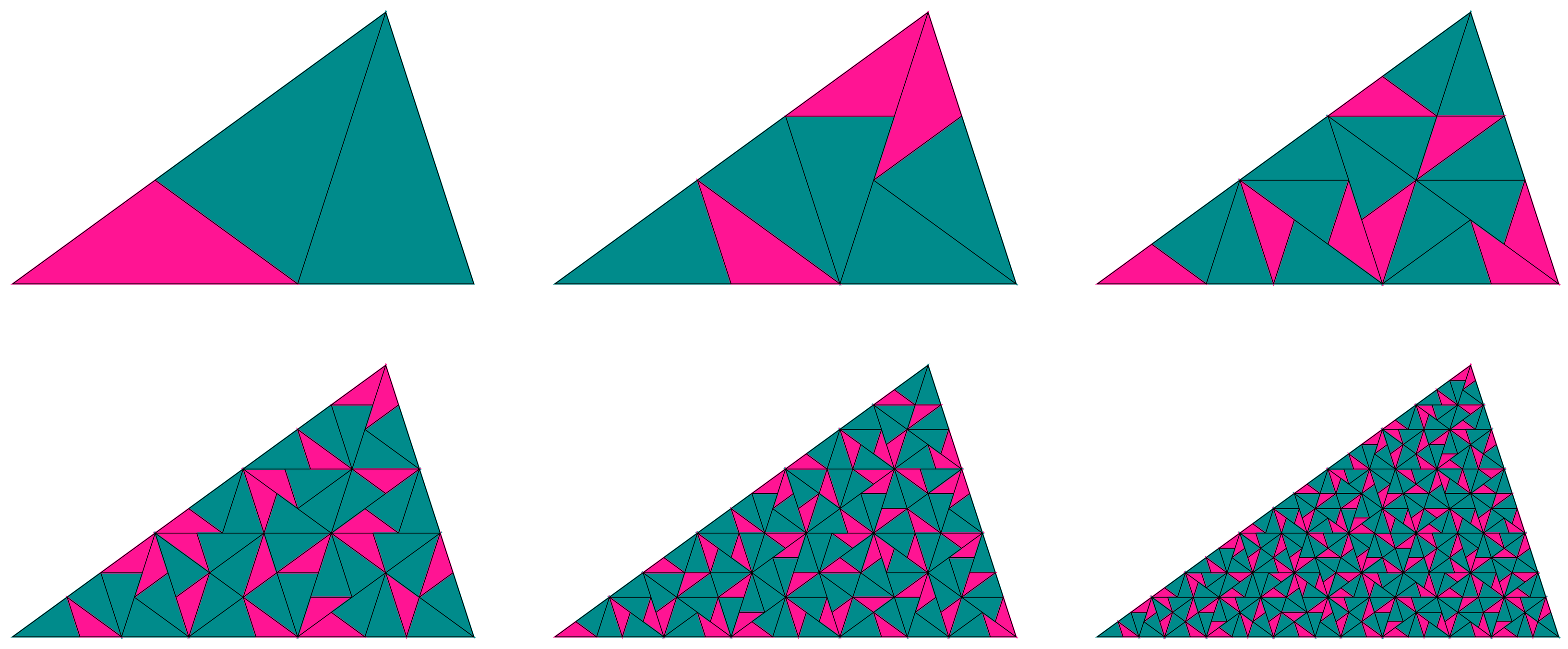
(★) est découpé en trois triangles :

- deux sont semblables à (★)
- un est semblable à (•)

(•) est découpé en deux triangles :

- un est semblable à (★)
- un est semblable à (•)

Ensuite, partant initialement de , les itérations successives donnent :

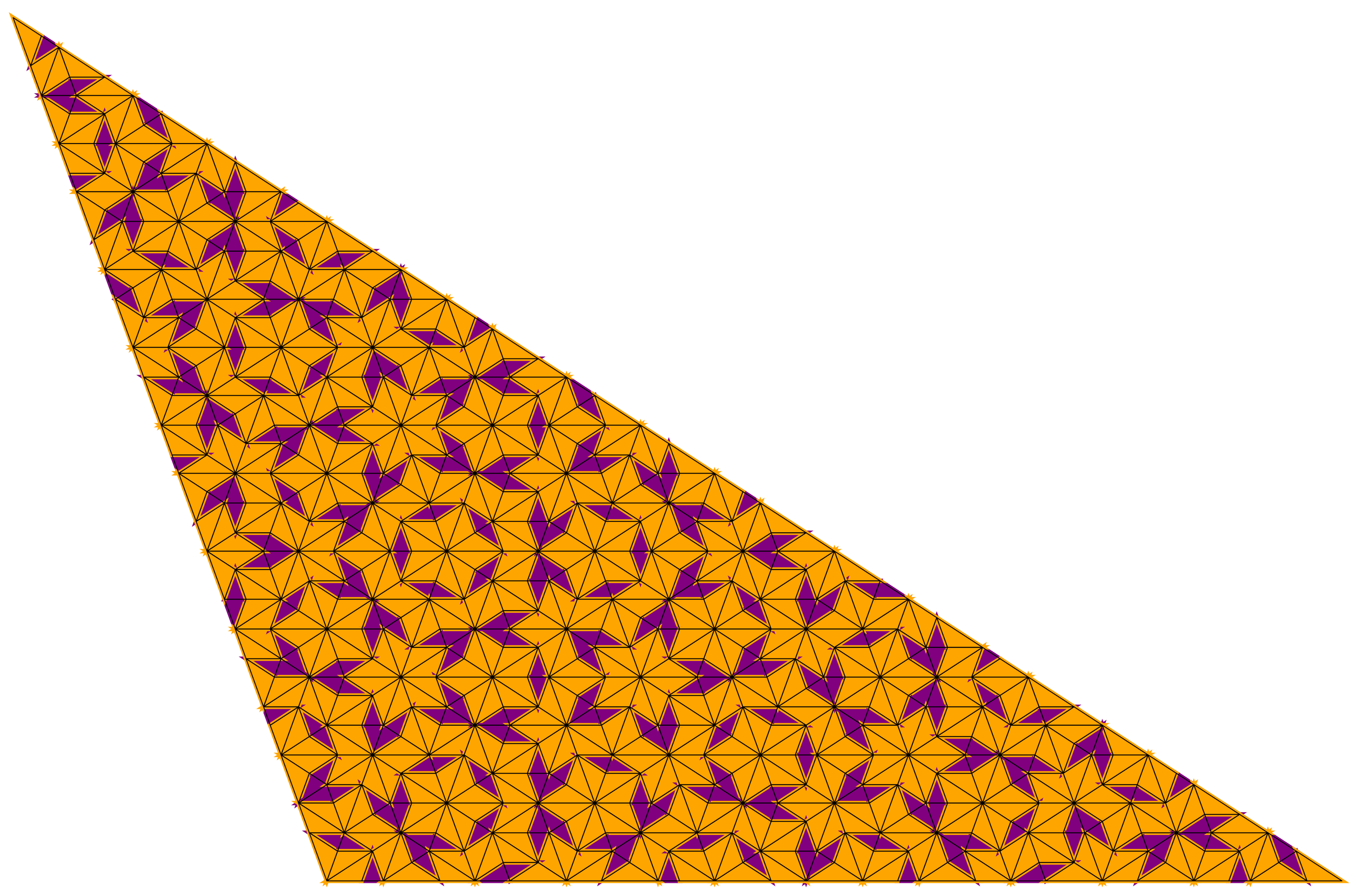


Les pavages de Penrose ne sont **pas périodiques**.

Si on note u_n le nombre de triangles verts après la $n$ième transformation et v_n le nombre de ceux qui sont roses, on a : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$.

Ainsi, on peut montrer qu'on a $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, le **nombre d'or**! Cela veut dire que pour n grand, la **quotient** du nombre de triangles (★) par le nombre de triangles (•) est proche de ϕ.

En partant de formes initiales différentes ou de règles de découpage différentes, on peut obtenir d'autres jolis pavages :



Les diamants aztèques

Il s'agit ici de paver un **diamant** à l'aide de **dominos** de taille 2×1. La suite du nombre de pavages possibles du diamant d'ordre n (c'est-à-dire de hauteur $2n$ cases) est $2^{n(n+1)/2}$. Voici quelques pavages d'un diamant d'ordre 3 (il en existe 64) :