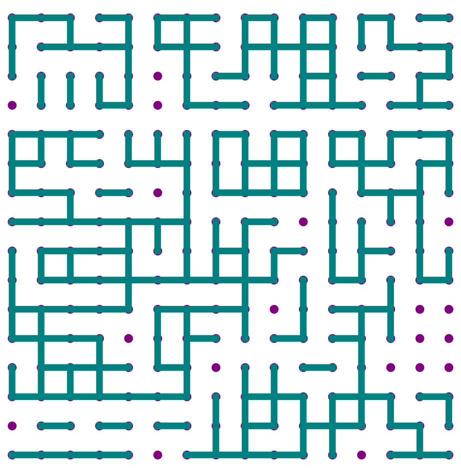
Percolation

La percolation ?

La **percolation** est, à l'origine, le nom du phénomène de passage d'un fluide dans un solide perméable. On observe par exemple ce phénomène dans une **machine à café** lorsqu'on fait passer de l'eau dans un bloc de café. Les **mathématiciens** se sont inspirés de ce phénomène et ont défini deux types de percolation : la **percolation par arêtes** et la **percolation par sites**.

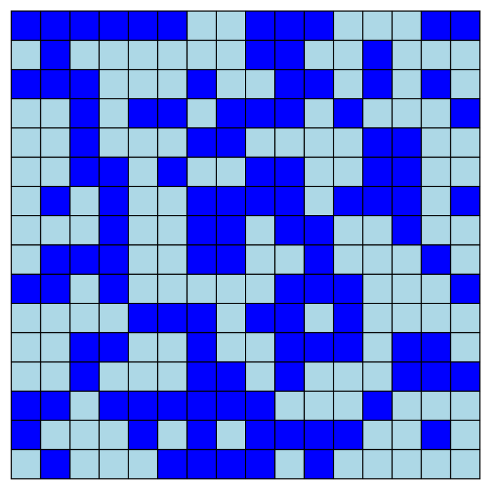
Percolation par arêtes

On part d'un **réseau** et on se fixe $p \in]0,1[$. Dans ce réseau, dont on relie chaque couple de sommets voisins avec probabilité p. On s'intéresse alors à l'existence d'un chemin passant par les arêtes et permettant de **traverser** le réseau ou bien, dans le cas d'un réseau **infini**, à l'existence d'un chemin infini. C'est ce qu'on appelle la **percolation par arêtes**.



Percolation par sites

On se fixe aussi $p \in]0,1[$, on considère deux couleurs et on part aussi d'un réseau mais ici, on le voit plutôt comme un **pavage**. Une brique du pavage est de couleur A avec probabilité p et de couleur B avec probabilité $1-p$. On s'intéresse alors à l'existence d'un chemin permettant de traverser le réseau et n'empruntant que des briques de couleur A. C'est ce qu'on appelle la **percolation par sites**.

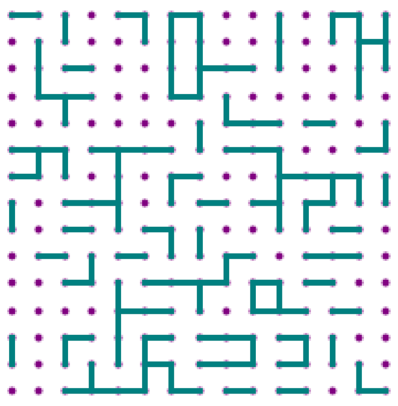


Les **applications de la percolation** sont très nombreuses : étude de la propagation de **feux de forêts**, de la propagation d'**épidémies**, de la **diffusion d'une information** dans un réseau de télécommunication (où par exemple les conditions météo affectent les transmissions entre relais), ...

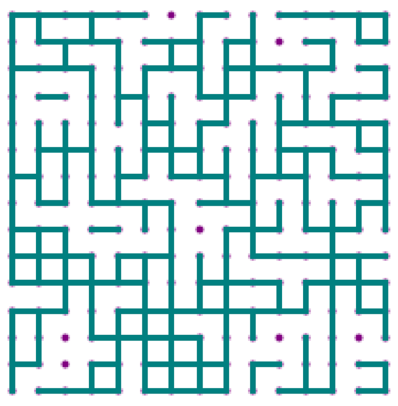
Percolation par arêtes

dans $\mathbb{Z}^2$

On se place dans $[\![1,n]\!]^2$ et on se fixe $p \in]0,1[$. Deux sommets voisins sont reliés avec probabilité p.



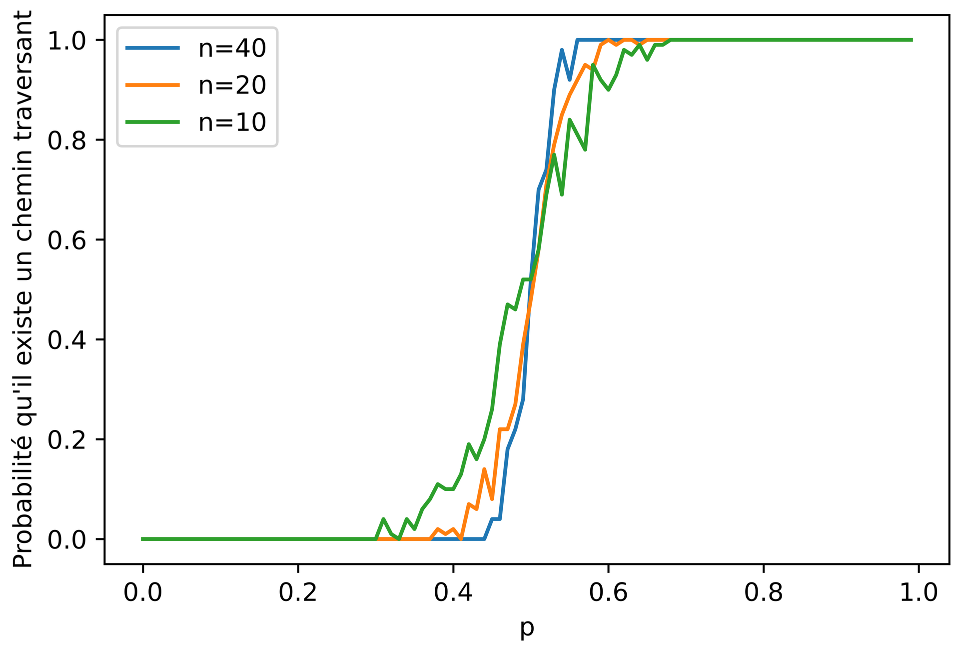
$p = 0.3$



$p = 0.7$

On s'intéresse à la probabilité $\theta(p)$ d'existence d'un **chemin qui traverse** le réseau de haut en bas. On peut approcher cette probabilité par **simulations informatiques**.

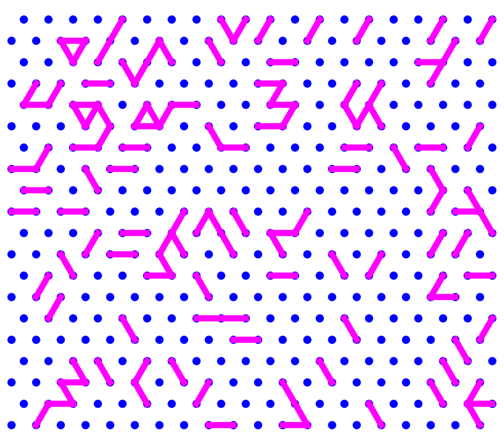
Voici ce qu'on obtient pour de $n \in \{10, 20, 40\}$. La fonction θ est **croissante** même si cela n'est pas tout à fait ce qu'on observe ici (cela est lié aux simulations).



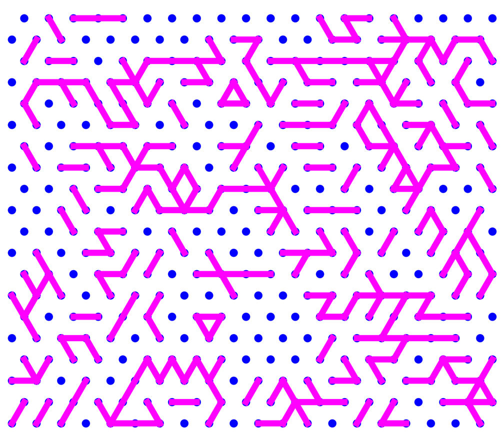
En augmentant n, on peut ainsi s'approcher du **seuil de percolation** c'est-à-dire de la valeur p_c à partir de laquelle la probabilité d'avoir une composante infinie est > 0. Il a été démontré que dans le cas de la percolation par arêtes dans $\mathbb{Z}^2$, on a $p_c = \frac{1}{2}$.

dans un réseau triangulaire

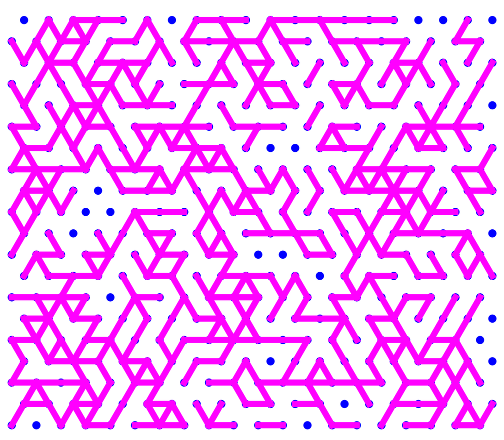
On part d'un réseau triangulaire du plan. Chaque point a **6 voisins** et deux points voisins sont reliés avec probabilité p.



$p = 0,1$



$p = 0,2$



$p = 0,4$

Le **seuil de percolation** est $p_c = 2\sin\frac{\pi}{18} \approx 0,35$.

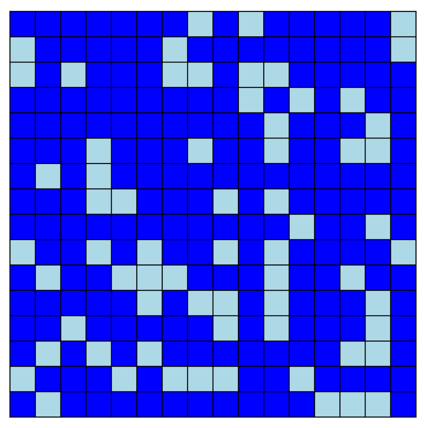
Et en dimension 3 ?

Dans $\mathbb{Z}^3$, **on ne connaît que des valeurs approchées** des seuils de percolation. Dans le cas de la percolation par arêtes, une valeur approchée est $0,247$ et pour ce qui est de la percolation par sites, c'est $0,307$.

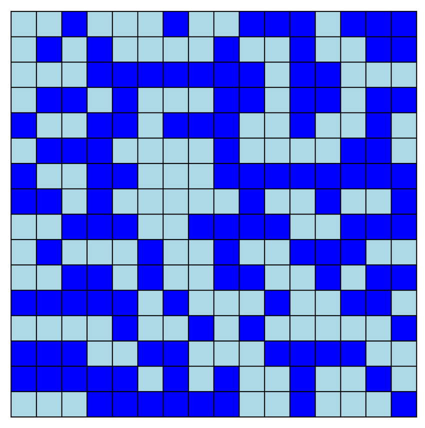
Percolation par sites

dans $\mathbb{Z}^2$

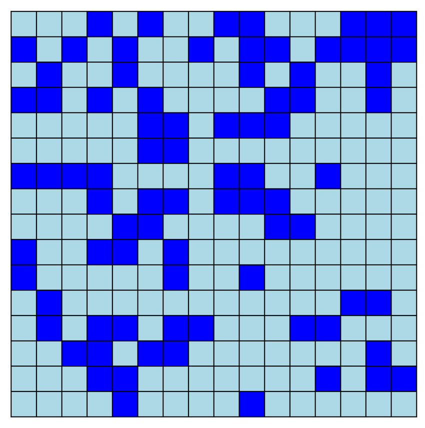
On considère un pavage du plan utilisant des carrés de même taille et de deux couleurs : **cyan** et **bleue**. A chaque emplacement, on place un carré de couleur **cyan** avec probabilité p et, sinon, on place un carré de couleur **bleue**.



$p = 0.3$



$p = 0.5$

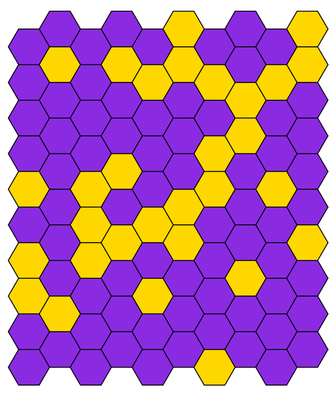


$p = 0.7$

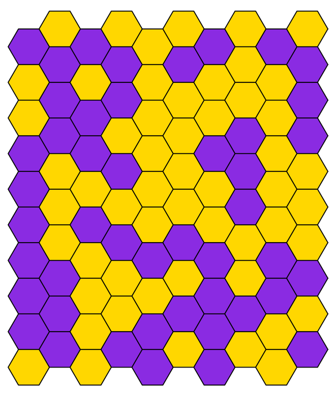
Ici, le **seuil de percolation** p_c vaut environ $0,59$.

dans un réseau hexagonal

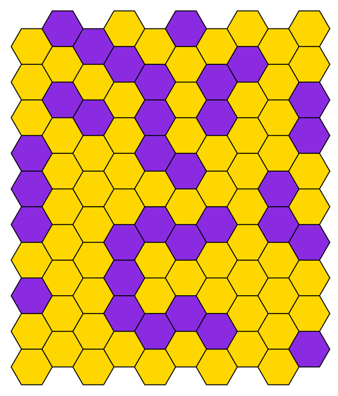
Ici, on considère un pavage hexagonal. Un hexagone est de couleur jaune avec probabilité p et sinon, il est de couleur **violette**.



$p = 0.3$



$p = 0.5$



$p = 0.7$

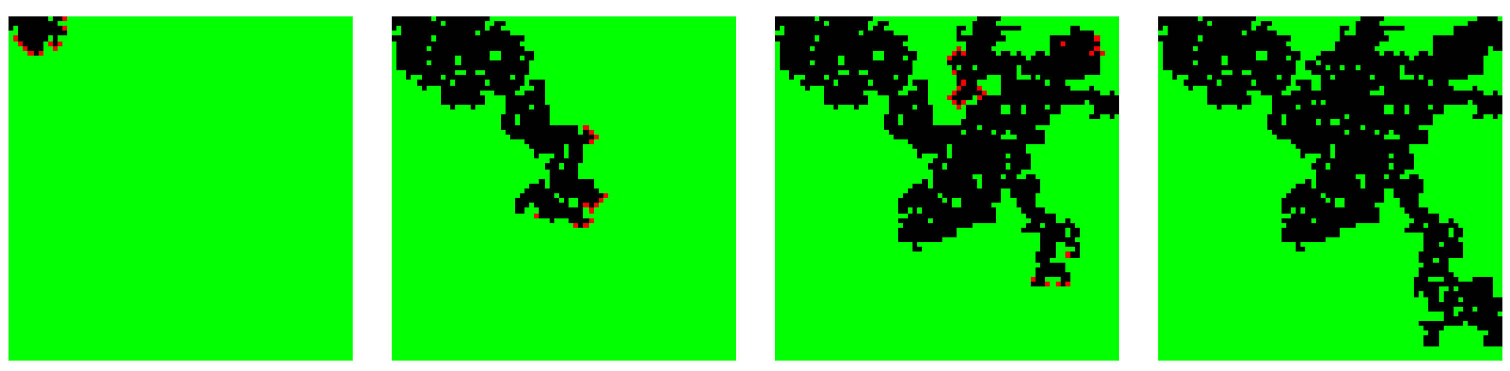
Ici, le **seuil de percolation** vaut $\frac{1}{2}$.

Feux de forêts

On se place dans un carré $[\![1,n]\!]^2$: en chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ se trouve un arbre. L'arbre en position $(1,n)$ **prend feu** et le feu se **propage** avec probabilité p d'un arbre à un de ses voisins.

- un point vert représente un arbre en vie,
- un point **rouge** représente un arbre en **feu**,
- un point **noir** représente un arbre **brûlé**.

Voici une **simulation** avec $n = 70$ et $p = 0.5$:



En faisant plusieurs simulations, on peut obtenir le **pourcentage** de forêt brûlée en fonction de p :