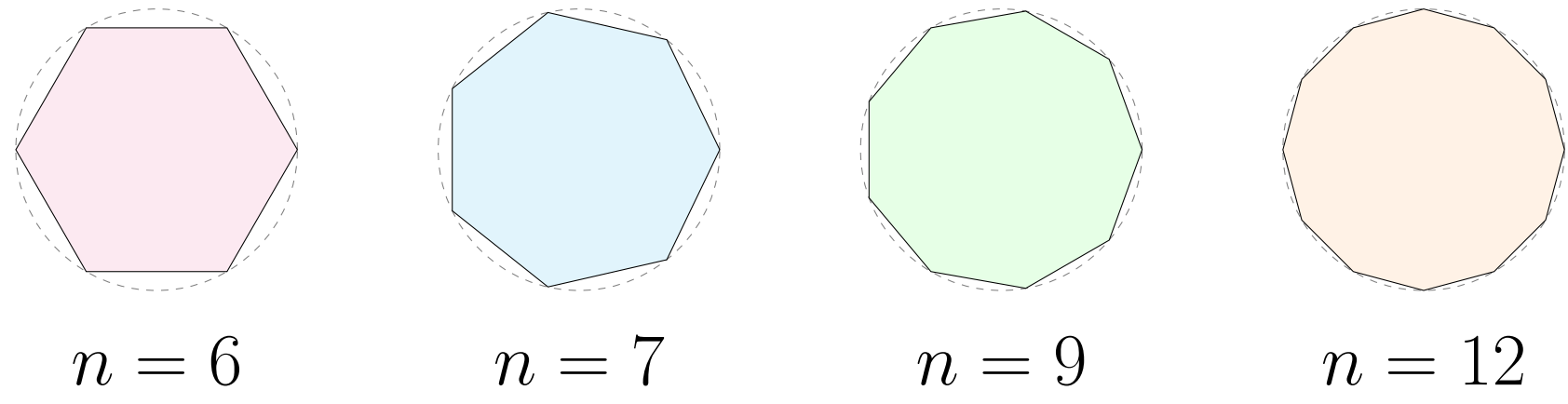


POLYGONES

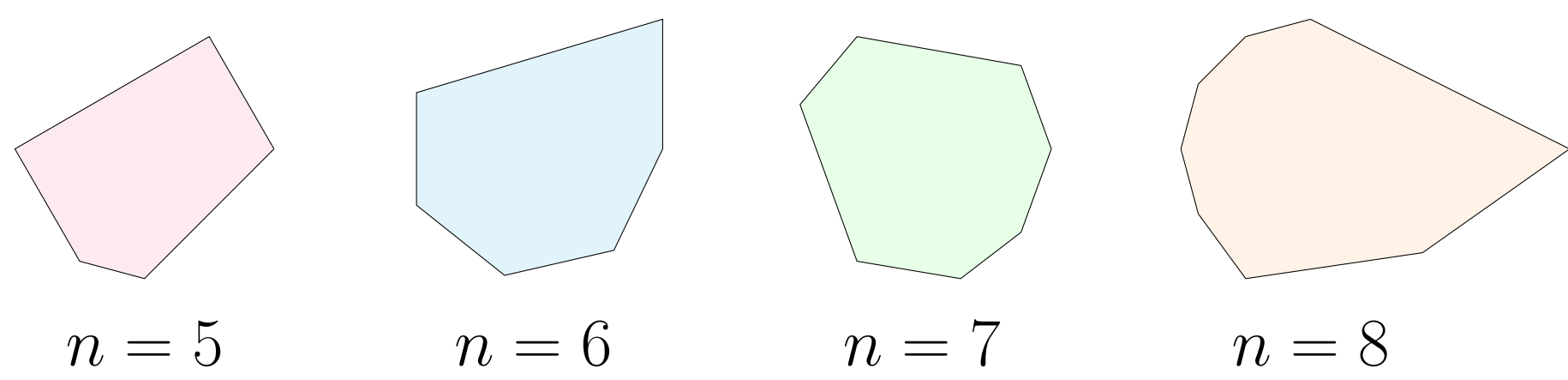
Toutes sortes de polygones

Polygones convexes réguliers

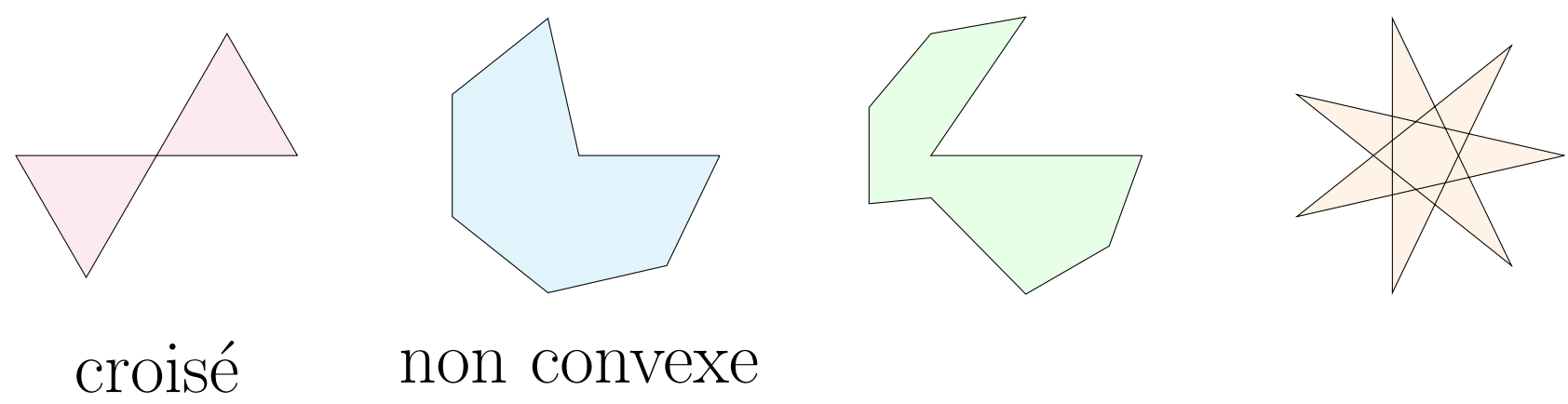
On peut les définir comme étant des polygones convexes inscrits dans un cercle et dont tous les **côtés sont de même longueur**.



Polygones convexes non réguliers



Polygones non convexes, croisés, ...



Construire à la règle et au compas

On dispose d'un crayon, d'une règle non graduée et d'un compas. A l'aide de ces trois outils, on cherche à tracer des polygones réguliers.

Que sait-on construire ?

On sait tracer la droite passant par deux points distincts donnés.
On sait construire des **médiatrices** et à partir de cela, on peut donc construire des **droites perpendiculaires** et donc des **droites parallèles**.
On sait construire des **bissectrices**.

Quels sont les polygones réguliers constructibles ?

Théorème de GAUSS-WANTZEL : *Le polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et de nombres de FERMAT premiers.*

Voyons ce que cela donne pour les petites valeurs de n :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	✓	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	×	✓

En effet:

- $3 = F_0$
- $4 = 2^2$
- $5 = F_1$
- $6 = 2^1 \cdot F_1$
- $8 = 2^3$
- $10 = 2^1 \cdot F_1$
- $12 = 2^2 \cdot F_0$
- $15 = F_0 \cdot F_1$

Des problèmes célèbres de construction à la règle et au compas

- Partant d'un angle quelconque, en général on ne sait pas le découper en 3. C'est le problème de la **trisection** de l'angle.
- Partant d'un disque, on cherche à construire à la règle et au compas, un carré de même aire que le disque. On sait montrer que cela n'est pas possible. C'est le problème de la **quadrature du cercle**.
- Partant d'un cube, on cherche à construire à la règle et au compas un cube dont le volume est le double du volume du cube initial. C'est le problème de la **duplication du cube** et on sait montrer que cette construction n'est pas possible.

Nombres de Fermat

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $F_k = 2^{2^k} + 1$. Les F_k sont les nombres de FERMAT. F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers et ce sont les seuls nombres de FERMAT premiers connus à ce jour.

On a

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$$

Il a été montré que pour $k \in \llbracket 5, 32 \rrbracket$, F_k n'est pas premier.

Enveloppe convexe

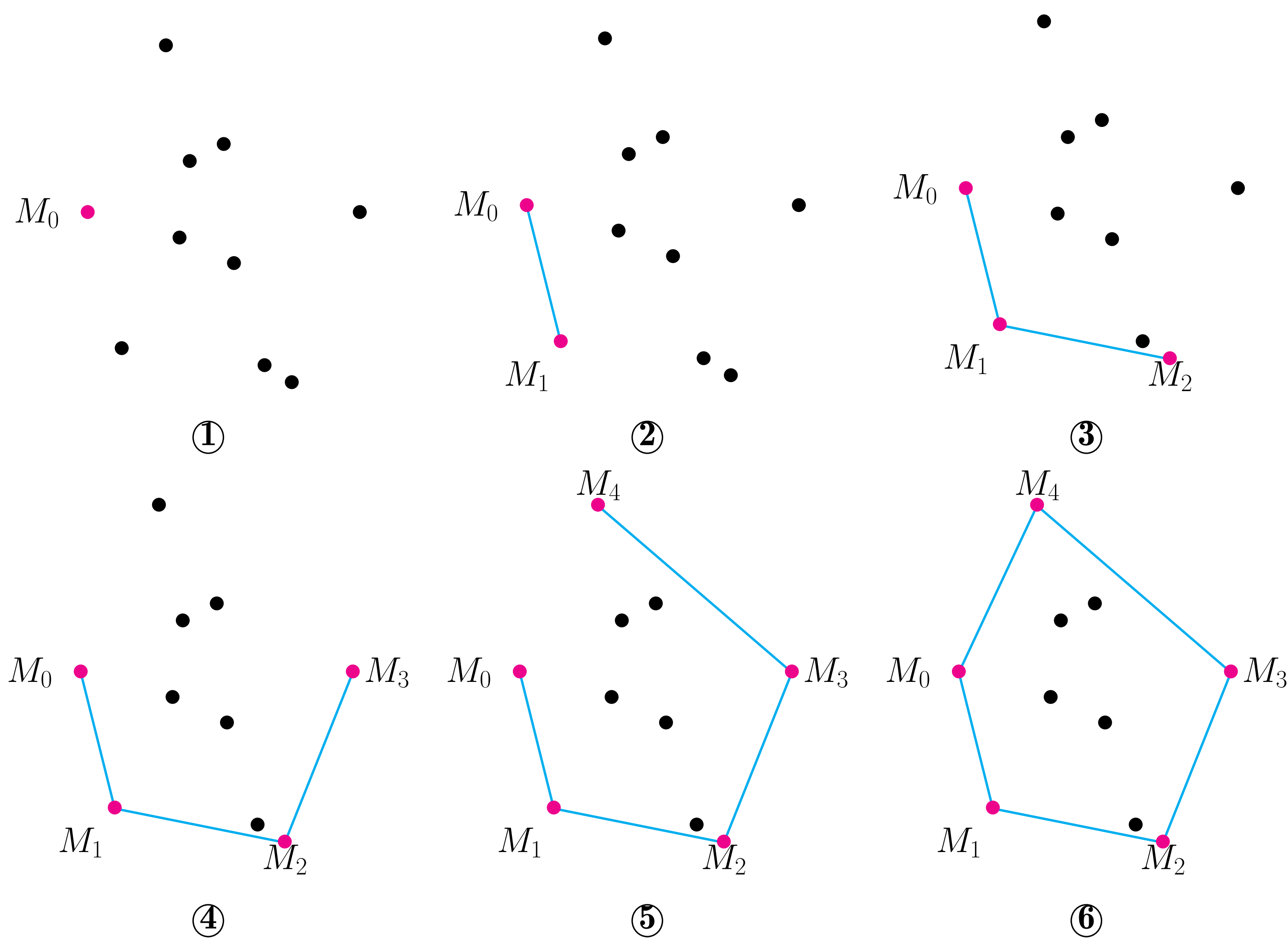
Problème

On considère une famille finie de points du plan (notée Γ) dont on cherche l'**enveloppe convexe** c'est-à-dire le plus petit convexe contenant ces points. Cette enveloppe convexe est un **polygone**.

Une méthode

Pour A, B et C trois points, on note $\theta_{A,B,C}$ la mesure dans $[0, 2\pi[$ de l'angle (\vec{BA}, \vec{BC}) .

- On considère un point d'abscisse minimale. On le note M_0 .
- On choisit ensuite M_1 qui minimise les $\theta_{M_0+j, M_0, M}$ pour $M \in \Gamma$.
- Soit $p \geq 1$. Supposons avoir construit M_0, M_1, \dots, M_p . On choisit alors $M_{p+1} \in \Gamma$ tel que $\theta_{M_{p-1}, M_p, M_{p+1}}$ soit minimale.
- On continue ainsi jusqu'à obtenir à nouveau M_0 .



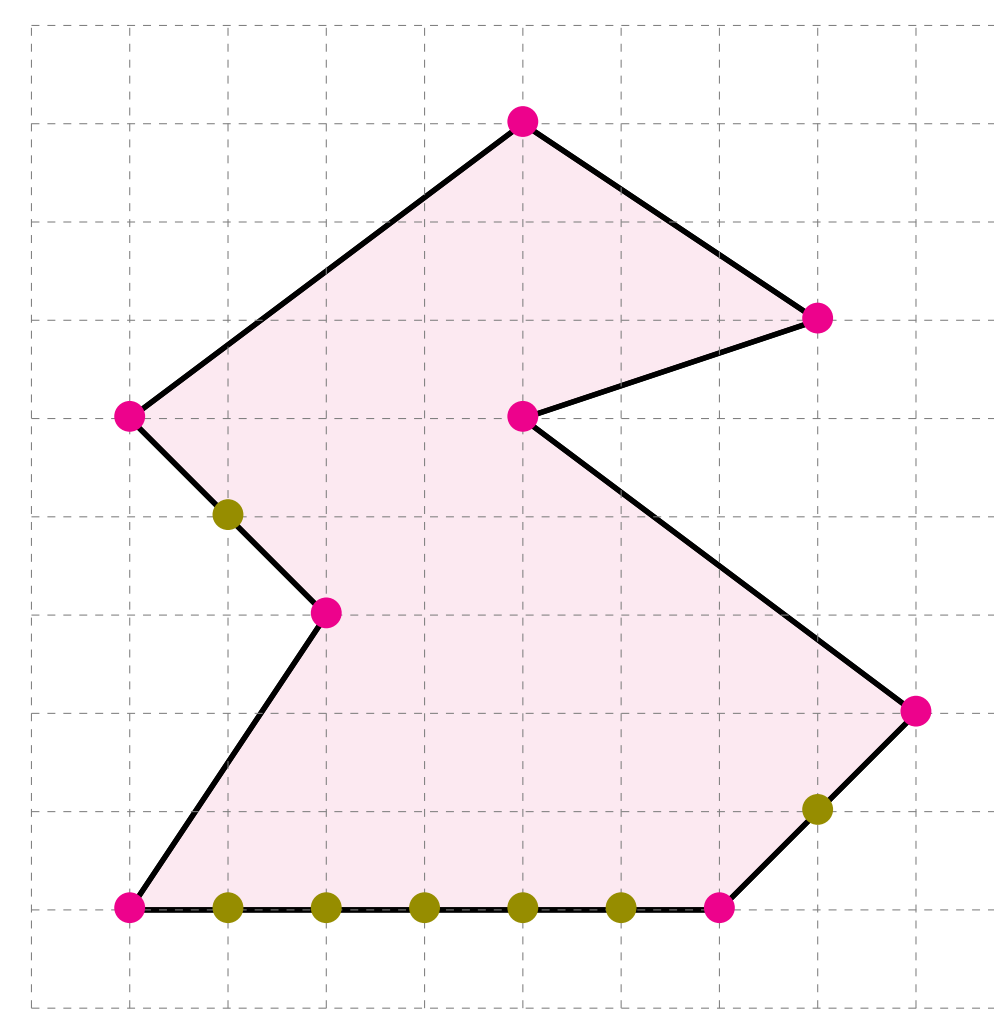
Théorème de Pick

Énoncé

On considère un polygone dont les sommets sont des points de \mathbb{Z}^2 . On note B le nombre de points de \mathbb{Z}^2 qui sont sur une arête du polygone (sommets compris), on note I le nombre de points de \mathbb{Z}^2 qui sont à l'intérieur du polygone.

L'aire du polygone est

$$\mathcal{A} = \frac{B}{2} + I - 1$$

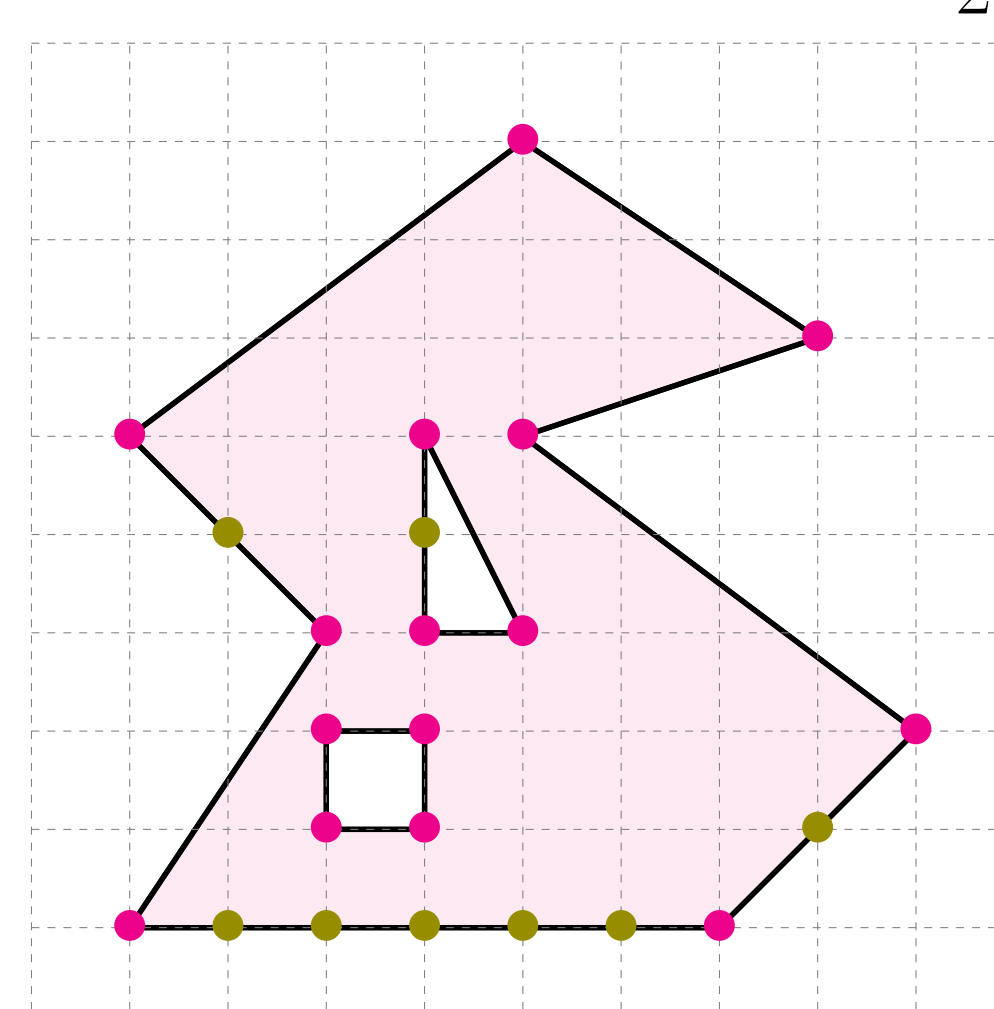


- $B = 15$
- $I = 31$
- $\mathcal{A} = 7,5 + 31 - 1 = 37,5$

Généralisation

En gardant les notations précédentes : si le polygone a n trous, alors

$$\mathcal{A} = \frac{B}{2} + I + n - 1$$



- $B = 23$
- $I = 23$
- $\mathcal{A} = 11,5 + 23 + 1 = 35,5$