La courbe du chien ... ou des chiens !

Un chien ...

... poursuit son maître en optimisant à chaque instant sa trajectoire afin de le retrouver au plus vite. Si le chien ne court pas assez vite, il ne rattrapera jamais son maître et pourra même tourner en rond indéfiniment!

Courbe paramétrée

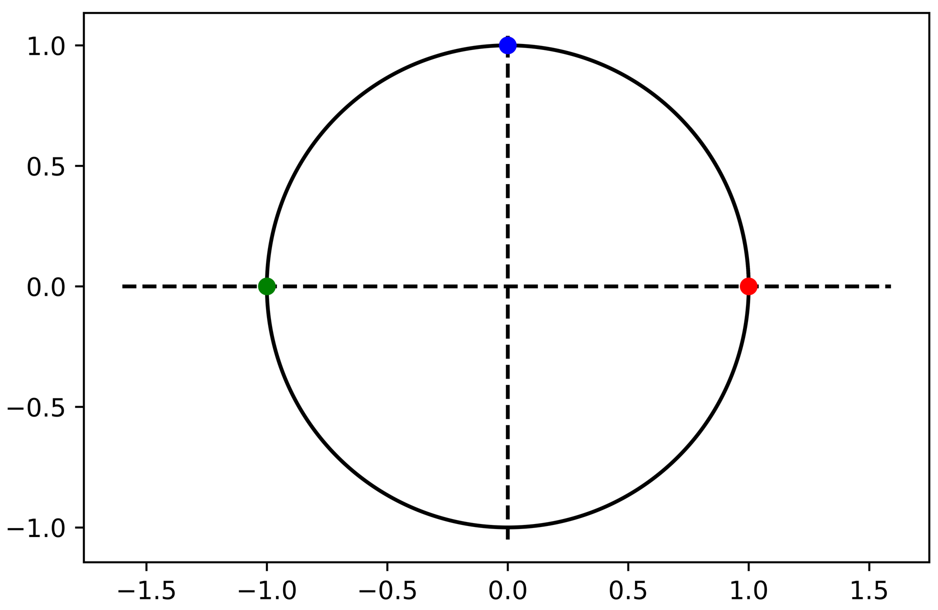
Si $t \in \mathbb{R}$, on note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du maître à l'instant t. On obtient ainsi une fonction qui modélise la position du maître

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

On appelle cela une **courbe paramétrée**.
Par exemple, pour

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

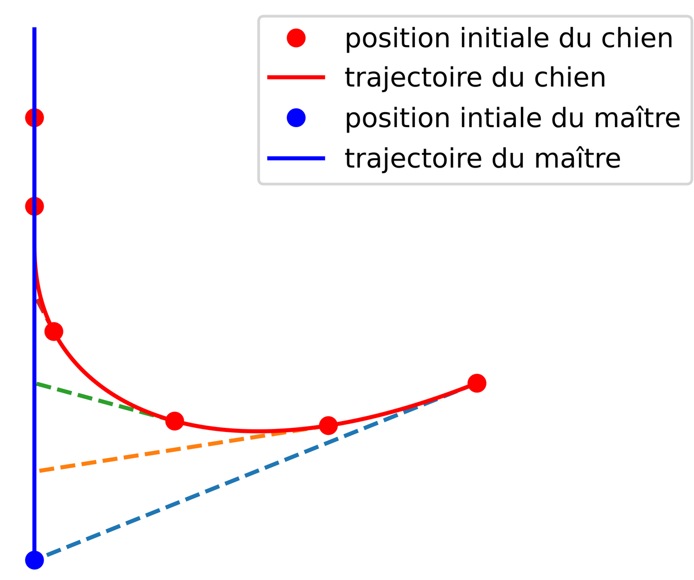
on obtient :



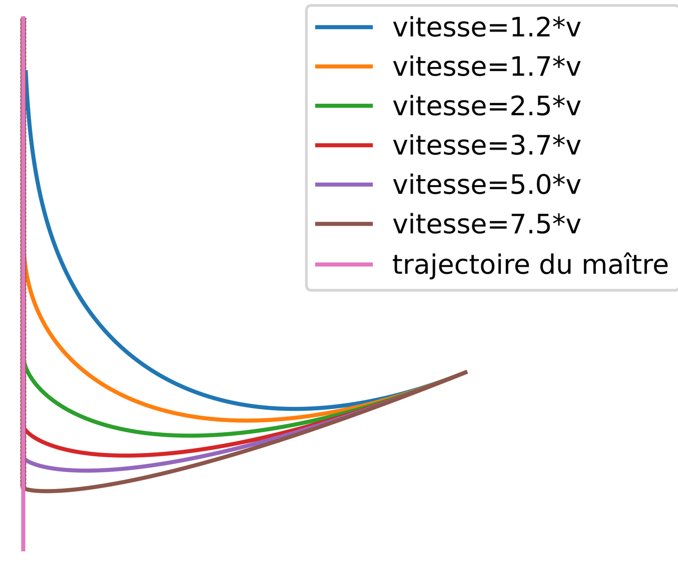
A l'instant $t = 0$, le maître se trouve en $(1, 0)$, à $t = \frac{\pi}{2}$, il se trouve en $(0, 1)$, puis à $t = \pi$, en $(-1, 0)$,... il tourne ainsi indéfiniment sur le cercle dans le **sens trigonométrique**.

Si le maître marche en ligne droite

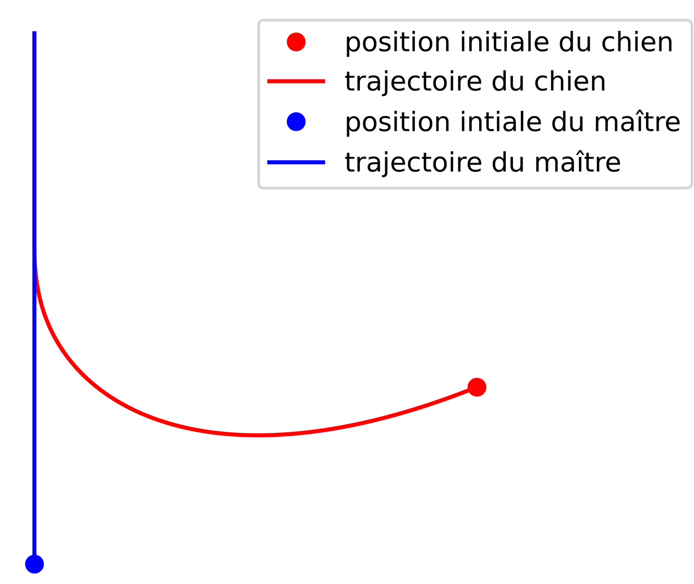
On suppose que le maître se déplace **verticalement** et que le maître et le chien se déplacent à **vitesse constante** (on dit que le maître se déplace suivant un **mouvement rectiligne uniforme**). Ici, on a donc, pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = a$ et $y(t) = vt$. A chaque instant, le chien ajuste sa trajectoire pour retrouver son maître le plus rapidement possible : il oriente donc sa trajectoire selon les pointillés que l'on voit sur ce dessin.



La courbe varie un peu selon la vitesse du chien. Ici, la vitesse du maître est v.



Finalement, sa trajectoire est la suivante :



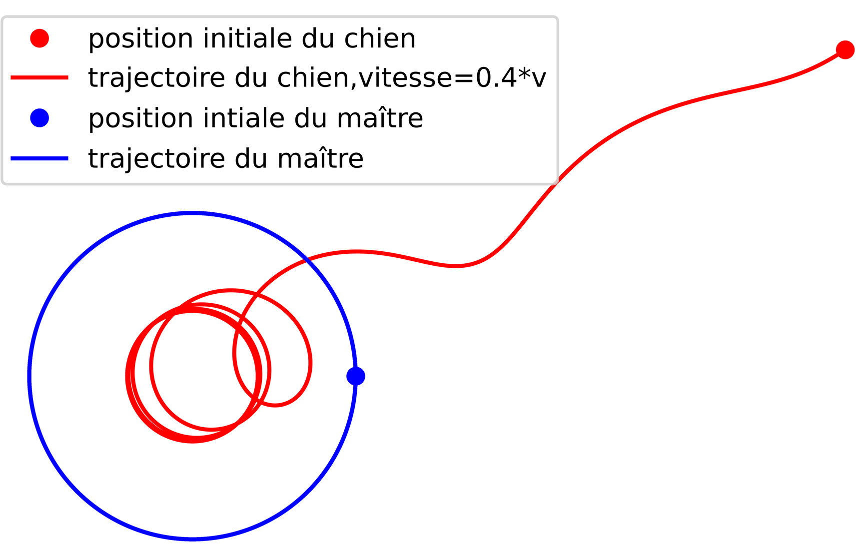
Dans le cas où le maître a un **mouvement rectiligne**, on sait déterminer une équation de la trajectoire du chien. On peut en effet obtenir une **équation différentielle** vérifiée par $x_c(t)$ et $y_c(t)$ (les coordonnées du chien à l'instant t) et la résoudre explicitement.

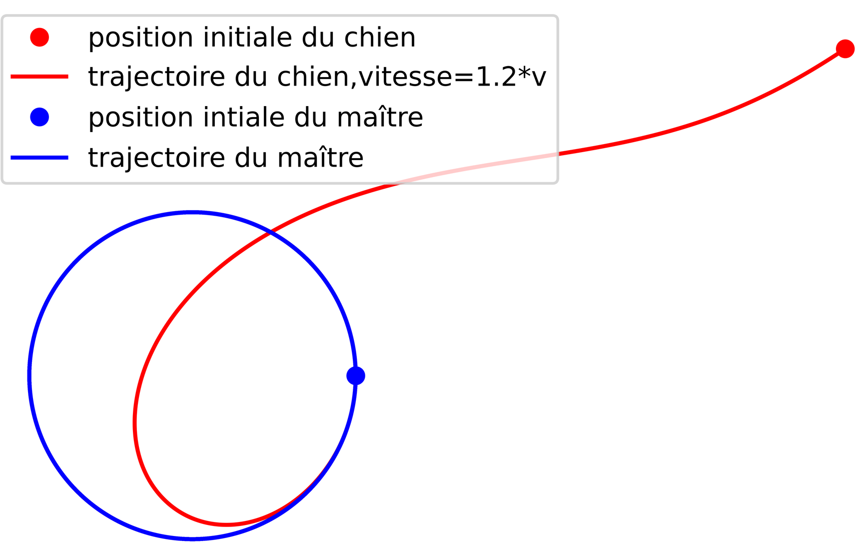
On peut alors montrer que le chien rattrape son maître si et seulement sa **vitesse est supérieure à celle de son maître**.

Si le chien était un peu malin et anticipait la trajectoire de son maître, il pourrait le rattraper **beaucoup plus vite** !

Là, où le chien tourne en rond ...

Si le maître se **déplace sur le cercle** centre O et de rayon R, à vitesse constante, il est possible que son chien (qui court aussi à vitesse constante) n'arrive **jamais à le rattraper** !





Si on note k le rapport entre la vitesse du maître et celle du chien, on obtient alors, comme pour le cas du mouvement rectiligne que le chien **rattrape son maître** si et seulement si $k < 1$.
Dans le cas où $k > 1$, la trajectoire du chien "tend" **vers un cercle** : il s'agit du cercle de centre O et de rayon R/k et la **distance maître-chien** tend vers

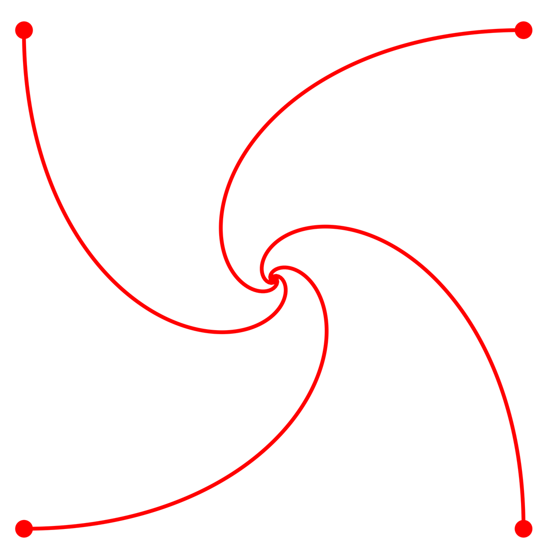
$$R\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}.$$

Enfin, si $k = 1$, alors le chien ne rattrapera jamais son maître mais la distance maître-chien **tend vers** 0.

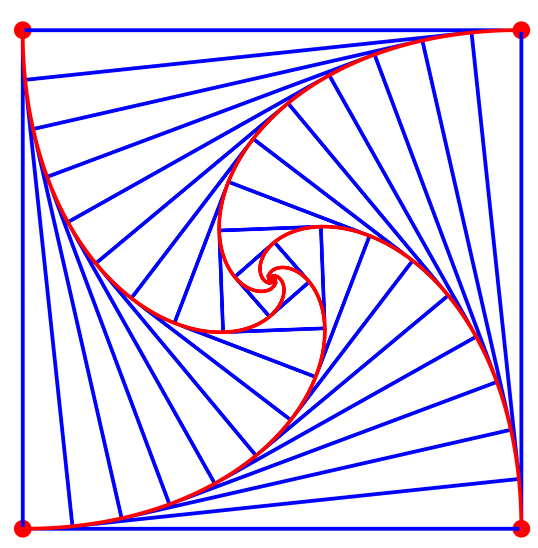
Plusieurs chiens courent les uns après les autres

On considère ici n chiens C_1, ..., C_n qui courent tous à la **même vitesse** et les uns après les autres c'est-à-dire que C_1 poursuit C_2 qui poursuit C_3, ..., C_n poursuit C_1.

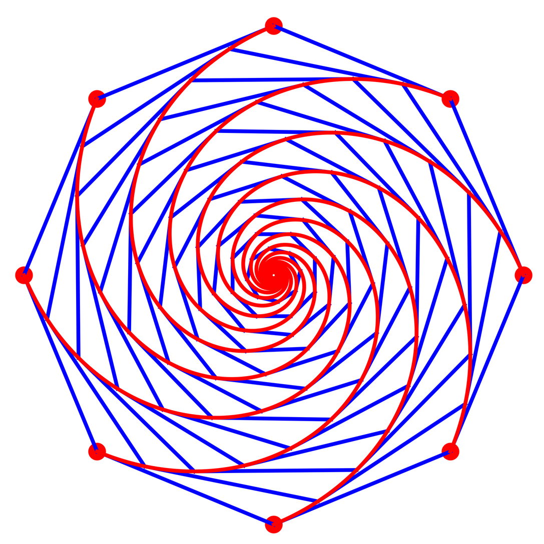
Avec **4 chiens**, on obtient les courbes suivantes :

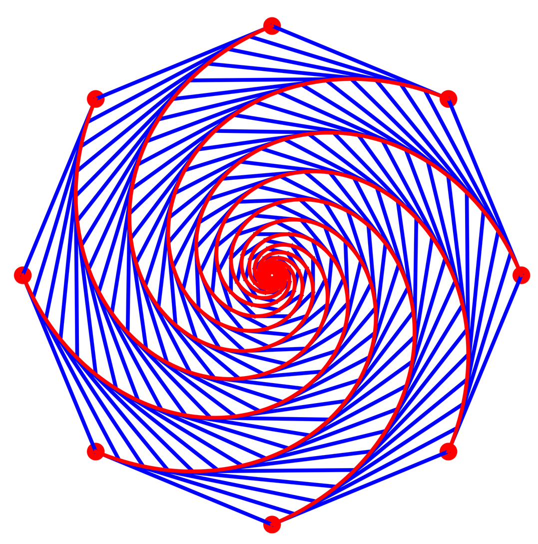


Si on ajoute les segments $[C_i(t), C_{i+1}(t)]$, on obtient une jolie image :



Avec **8 chiens** :





LaTeX TikZposter