Système proie-prédateur

Les équations de prédation de Lotka-Volterra ...

... sont un système de deux **équations différentielles** modélisant chacune l'évolution d'une population de deux espèces qui interagissent dans un **écosystème** simple où l'une des deux espèces est vue comme étant "les **proies**" (par exemple des lapins) et l'autre "les **prédateurs**" (par exemple des lynx).
Cette modélisation a été proposée indépendamment par deux mathématiciens : Alfred Lotka en **1925** et Vito Volterra en **1926**.

En notant $x(t)$ la population des proies à l'instant t et $y(t)$ celles des prédateurs à l'instant t, le système s'écrit :

$$\forall t, \begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(dx(t) - c) \end{cases}$$

Avec :

- $a > 0$: taux de **reproduction des proies**
- $b > 0$: taux de **mortalité des proies** mangées par les prédateurs
- $c > 0$: taux de **mortalité des prédateurs**
- $d > 0$: taux de **reproduction des prédateurs** lié aux proies mangées

Les valeurs de $x(0)$ et $y(0)$ sont les **conditions initiales** du système : ce sont les valeurs initiales des populations et elles sont donc > 0.

Modélisation des proies : explication

L'équation s'écrit :

$$\forall t, x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t).$$

- Le premier terme "$ax(t)$" traduit la reproduction intrinsèque des proies. Sans prédation (c'est-à-dire si $b = 0$ ou $y(t) = 0$), on aurait pour tout t, $x'(t) = ax(t)$ et donc une **croissance exponentielle** de la population des proies.
- Dans le second terme "$-bx(t)y(t)$", $-by(t)$ est le taux de mortalité des proies. Ce taux dépend du nombre de prédateurs.

Et avec 3 espèces ?

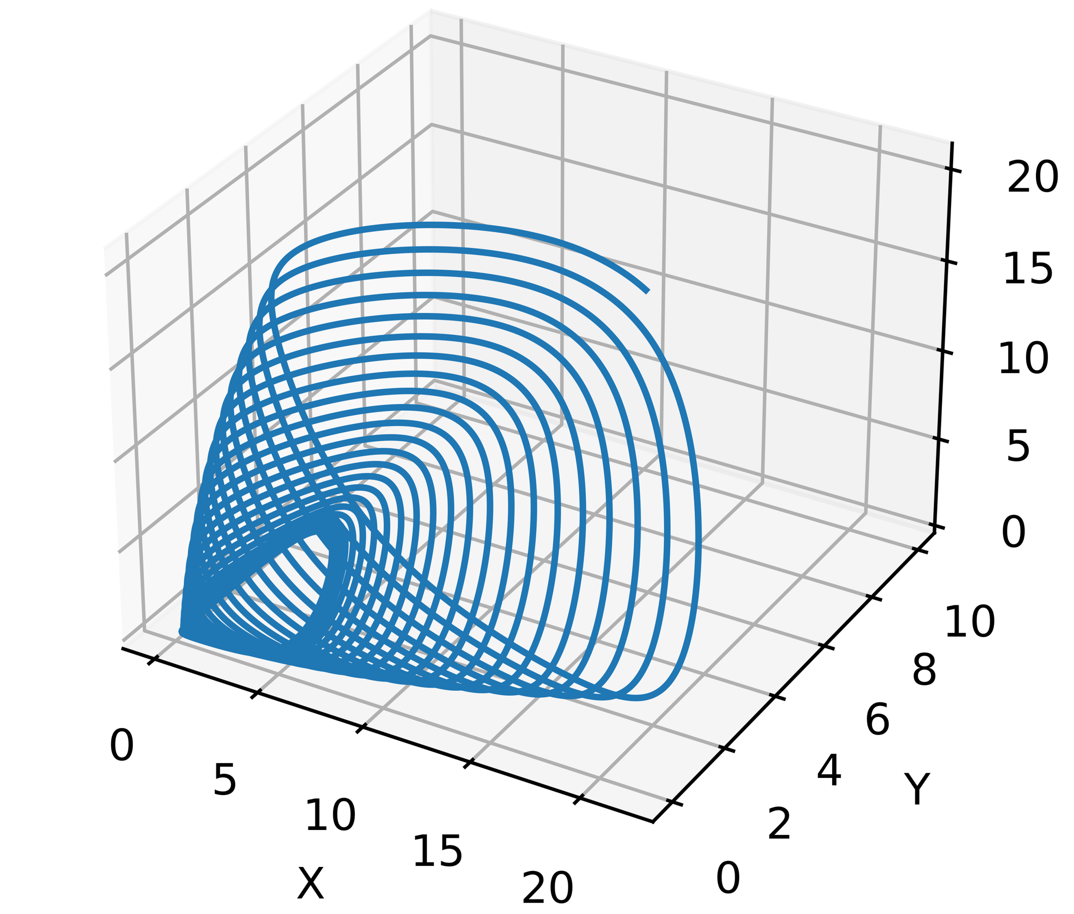
On considère ici une **chaîne alimentaire** de 3 espèces (par exemple vers de terre/oiseaux/chats).

- En bas de la chaîne, $x(t)$ est le nombre de proies (vers de terre)
- Au milieu de la chaîne $y(t)$ est le nombre de proies/prédateurs (oiseaux)
- En haut de la chaîne $z(t)$ est le nombre de "super prédateurs" (chats)

On écrit les équations ainsi :

$$\forall t, \begin{cases} x'(t) = x(t)(a_1 - b_1 y(t)) \\ y'(t) = y(t)(-a_2 + b_2 x(t) - c_2 y(t)) \\ z'(t) = z(t)(-a_3 + c_3 z(t)) \end{cases}$$

Le **diagramme des phases** obtenu pour $a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = b_2 = c_3 = 0.5$ et $a_3 = 0.6$ est une spirale.



Modélisation des prédateurs : explication

L'équation s'écrit :

$$\forall t, y'(t) = dx(t)y(t) - cy(t).$$

- Le premier terme "$dx(t)y(t)$" : $dx(t)$ est le taux de reproduction des prédateurs et cela est lié au nombre de proies. Plus il y a de proies, plus la population de prédateurs va augmenter.
- Le second terme "$-cy(t)$" traduit la mortalité naturelle des prédateurs. Sans proie, c'est le seul terme et $y(t)$ est alors une **exponentielle décroissante**.

Moyenne sur une période

Soit T la plus petite période > 0 du système. On définit les **valeurs moyennes** de x et y sur une période par

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \text{ et } \overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

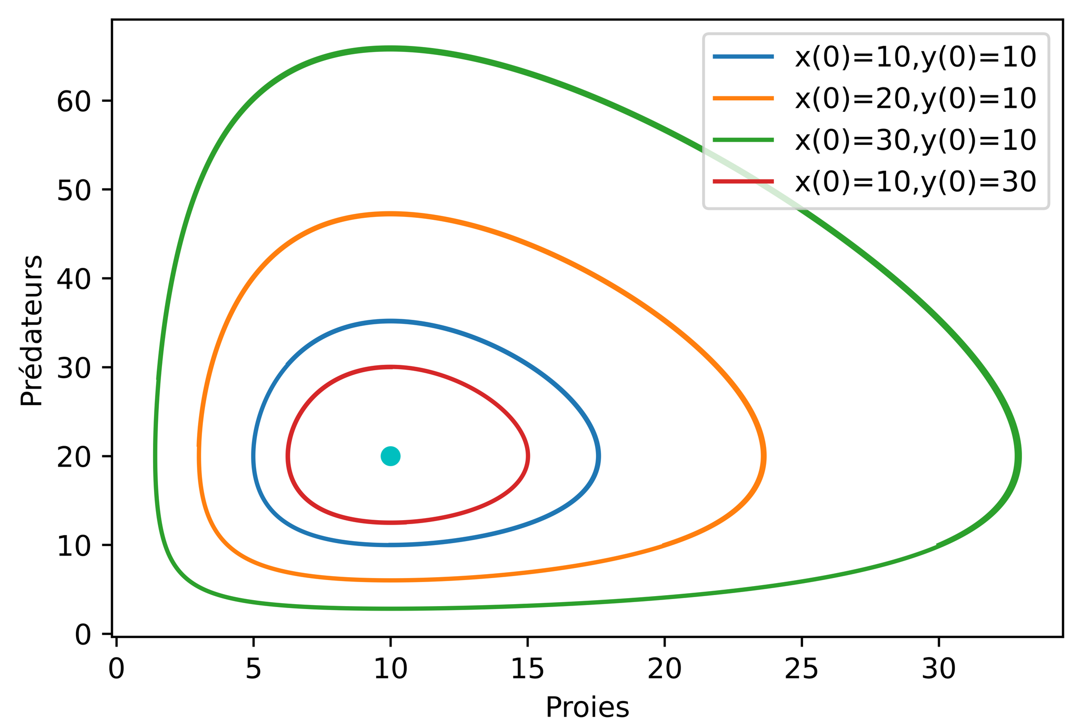
On peut montrer qu'on a

$$\overline{x} = \frac{c}{d} \text{ et } \overline{y} = \frac{a}{b}$$

Sur l'exemple de droite, cela donne $\overline{x} = 5$ et $\overline{y} = 20$ et cela semble cohérent avec le graphique.
Cela veut donc dire que $x(t)$ et $y(t)$ **oscillent autour des valeurs** $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$.
Ces valeurs jouent d'ailleurs un rôle particulier, car les fonctions constantes $x(t) = \frac{c}{d}$ et $y(t) = \frac{a}{b}$ sont solutions du système. Le point $(c/d, a/b)$ est appelé **point d'équilibre** du système.

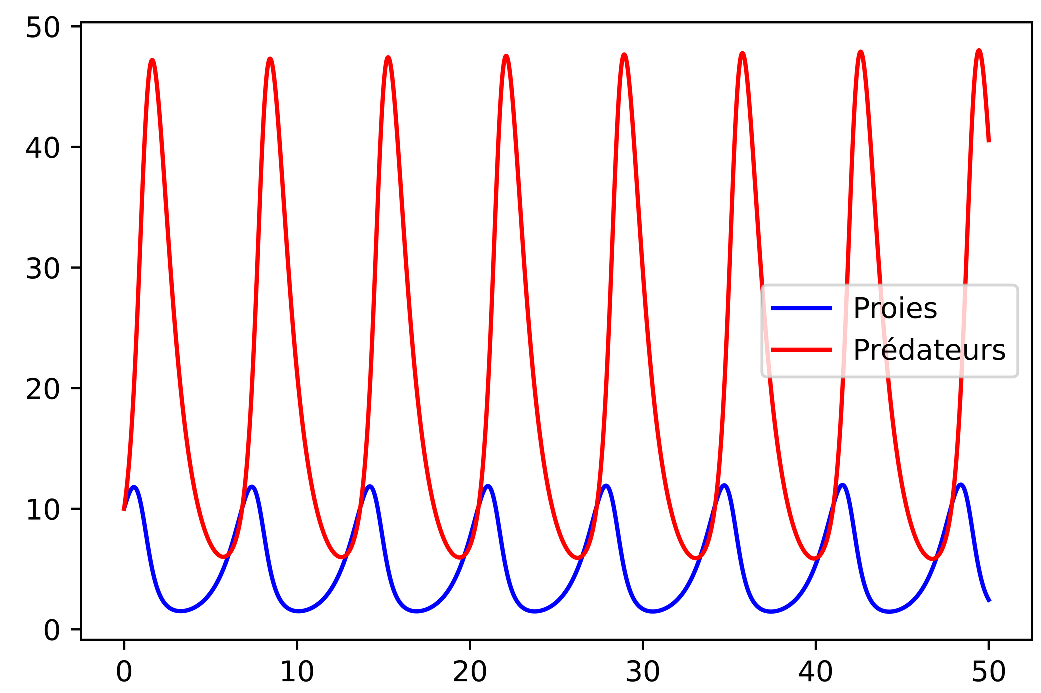
Faisons varier les conditions initiales

En gardant les valeurs $a = 1$, $b = 0.05$, $c = 1$ et $d = 0.2$, on obtient ces diagrammes des phases :

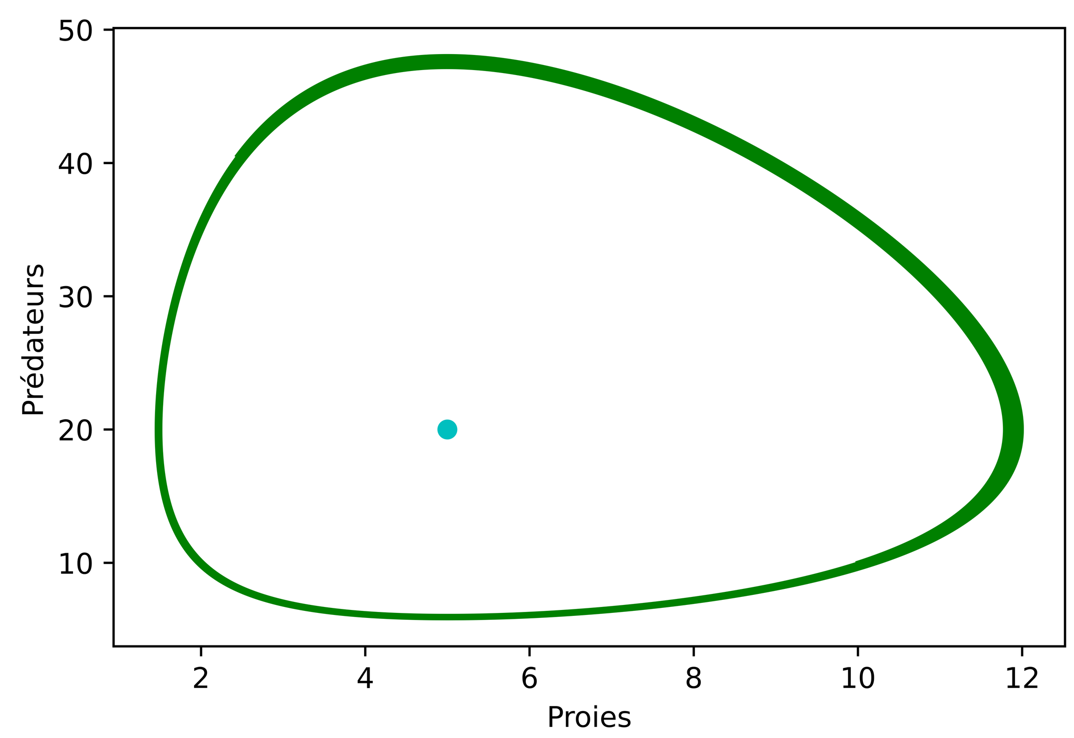


Un système équilibré

En général, **on ne sait pas résoudre explicitement** les équations de prédation de Lotka-Volterra et on les résout donc numériquement, par exemple avec la méthode d'Euler.
Cependant, même si on ne sait pas les résoudre explicitement, on peut démontrer que ces **solutions** sont **périodiques**.
Pour $a = 1$, $b = 0.05$, $c = 1$ et $d = 0.2$ avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 10$, voilà ce qu'on obtient numériquement :



On observe que les deux espèces ont des **évolutions périodiques** de même période. Chaque pic de population des proies est suivi d'un pic pour la population des prédateurs.
On peut représenter la population des **prédateurs en fonction de celle des proies** et retrouver la cyclicité du système :



Partant des conditions initiales qui sont $(x(0), y(0)) = (10, 10)$, il s'agit de parcourir cette boucle dans le sens trigonométrique : les populations des proies et des prédateurs commencent par augmenter, puis, la population des prédateurs continue à augmenter pendant que celle des proies commence à décroître, ...
Ce graphique est appelé le diagramme des phases du système.
Le point en bleu est le **point d'équilibre** du système.