Conjecture de Syracuse

Définition

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite de Syracuse associée à N par : $u_0 = N$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \end{cases}$$

Par exemple, pour $N = 3$, la suite de Syracuse associée vaut :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
u_n	3	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	...

Conjecture de Syracuse

"Quelque soit l'entier non nul N choisi au départ, on finit toujours par tomber sur 1 et donc sur $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$."

Cette conjecture a été énoncée en 1937 par **Lothar Collatz** qui en a parlé à son collègue **Helmut Hasse**, qui la diffusa, à partir de 1952, aux Etats-Unis lors d'une visite à l'Université de Syracuse. Le mathématicien **Stanislas Ulam** la répandit aussi dans le Laboratoire de Los Alamos.

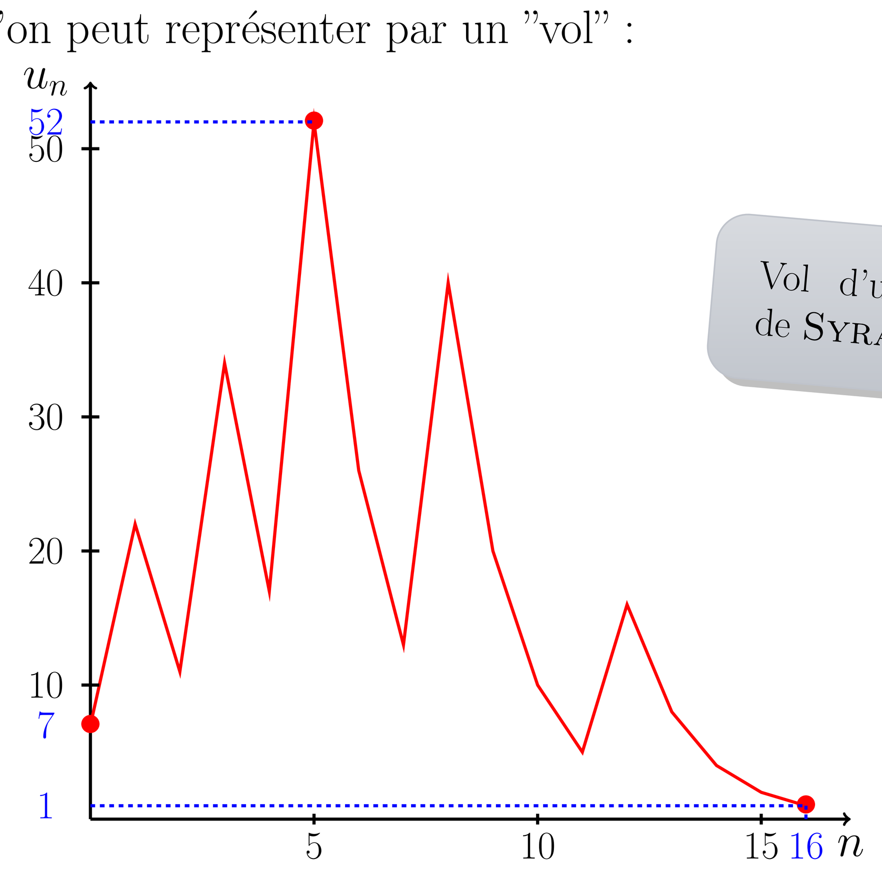
La conjecture de Syracuse est ainsi appelée, entre autres, conjecture de **Collatz** ou conjecture d'**Ulam**.

Vol d'une suite de Syracuse

Prenons $N = 7$ alors la suite de Syracuse associée vaut :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1

que l'on peut représenter par un "vol" :



Vol d'une suite de Syracuse

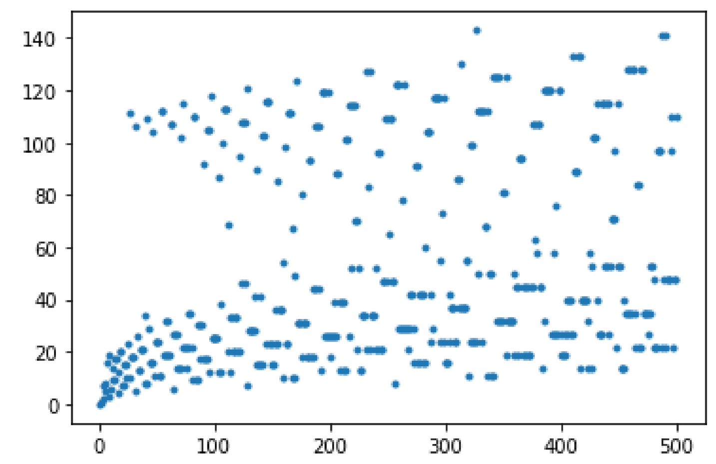
On définit alors la longueur et la hauteur du vol d'une suite de Syracuse : la longueur est le nombre d'étapes pour atteindre le 1 et la hauteur est la valeur maximale des termes de cette suite.

Par exemple, pour $N = 7$, la longueur vaut 16 et la hauteur vaut 52.

Pour $N = 3$, la longueur vaut 7 et la hauteur vaut 16.

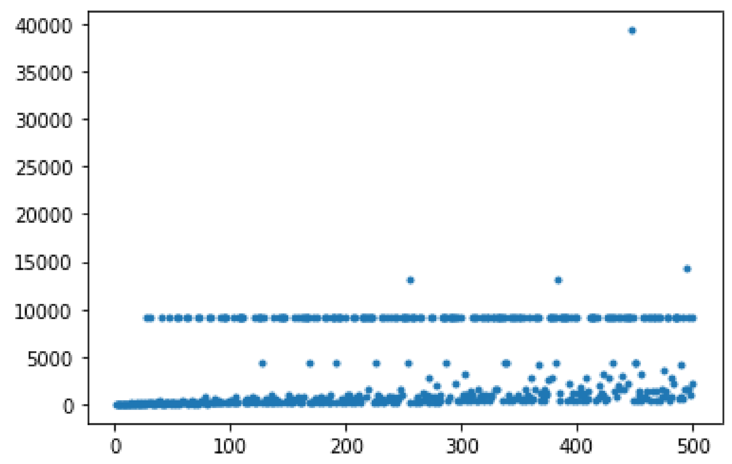
La conjecture de Syracuse peut alors se reformuler de la façon suivante : "tout vol est fini", c'est-à-dire atteint le 1.

Longueur et hauteur de vol



A gauche, on représente la longueur du vol en fonction de la valeur de départ.

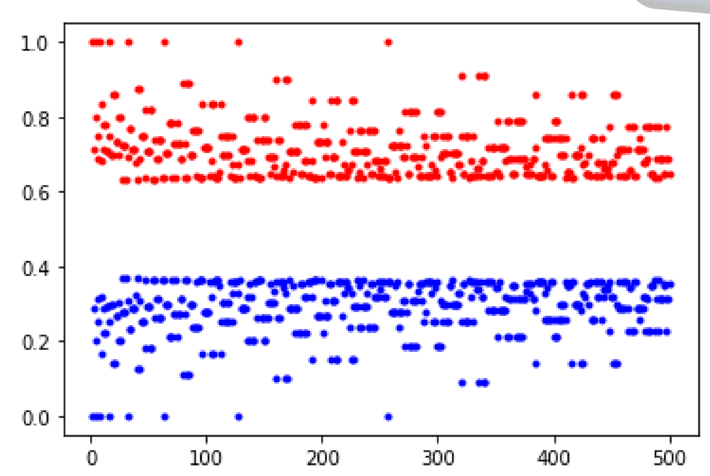
A droite, il s'agit de la hauteur du vol en fonction de la valeur de départ : on monte parfois très haut avant de redescendre.



Décroissance globale d'une suite de Syracuse

Une piste de recherche

On représente, en bleu, la proportion d'opérations $x \longmapsto 3x+1$ et, en rouge, la proportion d'opérations $x \longmapsto \frac{x}{2}$ parmi la suite de Syracuse selon la valeur de départ.



Intuitivement et approximativement, on multiplie par 3 dans moins de 38% des cas et on divise par 2 dans plus de 62% des cas. Ainsi la suite pourrait être majorée globalement par une suite géométrique de raison $3^{0.38} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0.62} \approx 0.99 < 1$: les suites de Syracuse pourraient être "approximativement et globalement décroissantes" et se rapprocher de 1.

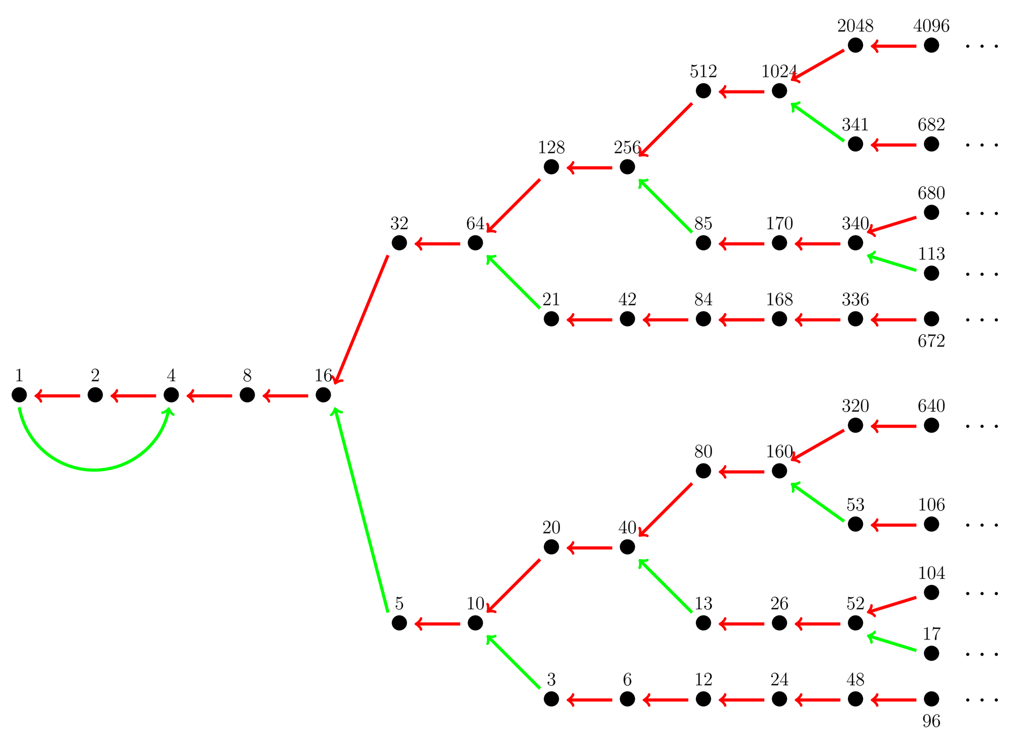
Une piste de recherche est d'essayer de formaliser ce "raisonnement" intuitif et non rigoureux.

Une autre piste de recherche...

Recherche des prédécesseurs de 1

Une autre piste de recherche est d'inverser le problème : rechercher les prédécesseurs successifs de 1.

La conjecture de Syracuse consiste alors à montrer que tous les entiers naturels non nuls appartiennent à l'ensemble des prédécesseurs successifs de 1.



- La conjecture de Syracuse affirme que tous les entiers non nuls apparaissent dans ce graphe.
- Les flèches rouges correspondent à l'opération $x \longmapsto \frac{x}{2}$ et les flèches vertes à celle $x \longmapsto 3x + 1$.
- On visualise bien le cycle $(1, 4, 2)$.
- Lorsqu'on se déplace d'un cran vers la droite dans ce graphe, la longueur du vol augmente d'une unité : le vol au départ de 3, 20, 21 et 128 a une longueur de 7.
- La première piste de recherche (encadré ci-dessus) est basée sur le fait qu'il semble y avoir beaucoup moins de flèches vertes que de flèches rouges.

Et maintenant ?

- Deux autres questions sont apparues assez rapidement : "toute suite de Syracuse est-elle bornée?" et "existe-t-il d'autres cycles que le cycle trivial $(1, 4, 2)$?".
  Les réponses "oui" à la première et "non" à la deuxième sont nécessaires et suffisantes pour démontrer la conjecture de Syracuse.
- Une approche en écriture binaire des entiers est intéressante car les deux opérations s'écrivent assez bien en base 2.
- Une approche probabiliste est aussi étudiée, celle-ci est liée à la première piste de recherche.
- Une approche calculatoire à l'aide d'ordinateurs amène aussi un certain nombre de résultats : la conjecture est vraie pour $N < 2^{71} \approx 2,36 \times 10^{21}$; ce qui permet de démontrer qu'un cycle autre que $(1, 4, 2)$ aurait une longueur au moins égale à 355×10^9.
- L'absence d'avancées significatives depuis plusieurs décennies conduit certains chercheurs à se demander si la conjecture de Syracuse est un **problème indécidable**...

Problème indécidable

En logique, une proposition est **indécidable** dans un système d'axiomes si on ne peut pas démontrer ni la véracité de la proposition, ni la véracité de sa négation.

Autrement dit, à notre système initial d'axiomes, on peut ajouter comme axiome la proposition et la théorie reste cohérente mais on peut aussi ajouter comme axiome la négation de la proposition et la théorie reste également cohérente.