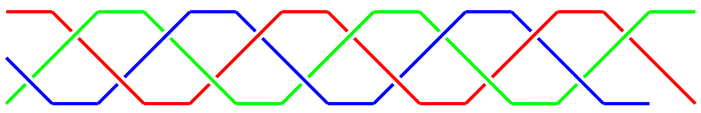
Tresses

Tresses

Une **tresse** est une suite de **croisements**. Elle peut avoir 1 brin, 2 brins, ..., n brins. Voici une tresse "classique " à 3 brins :

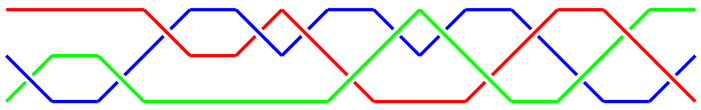
①

Pour que cela soit plus facile de suivre les différents brins, on peut les colorier :



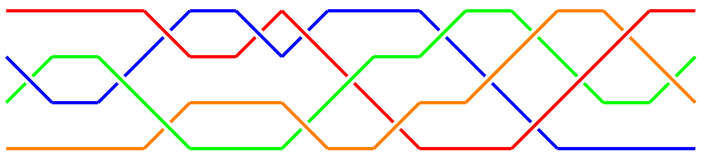
En voici une autre à 3 brins :

②

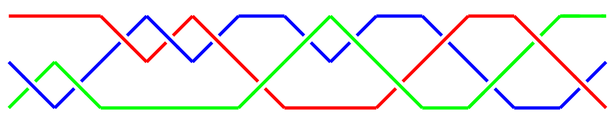


Et une à 4 brins :

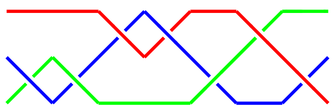
③



On dit que deux tresses sont **égales** ou encore **isotopes** si l'on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant des brins (et bien entendu, sans toucher aux extrémités ni couper les brins).
Les deux tresses suivantes sont égales à la tresse ② :



et



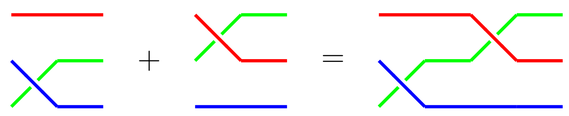
On note ② cette dernière représentation.

Un domaine de recherche actuel

La théorie des tresses est un domaine de recherche récent et actuel. Elle est en lien avec d'autres branches des mathématiques : **combinatoire**, **théorie des groupes**,..., en **physique** et, de façon un peu inattendue, la théorie des tresses trouve des applications en **cryptographie**.

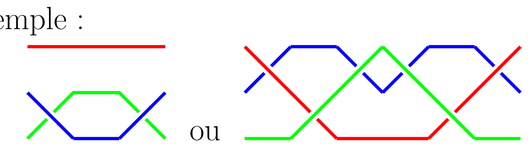
Des sommes de tresses

Partant de **deux tresses**, on définit la **somme** des deux tresses en connectant simplement les deux tresses :

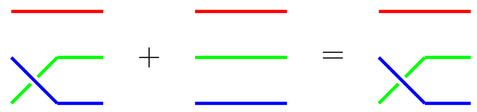


La tresse **neutre** est la tresse qui ne contient aucun vrai croisement :

Elle se représente aussi sous plein d'autres formes comme par exemple :

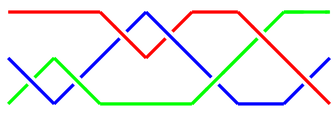


Quand on l'ajoute à une autre tresse, cela ne la modifie pas et on écrit donc :

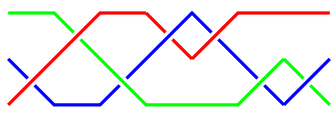


La tresse miroir

La tresse "miroir" est la tresse obtenue par symétrie par rapport à l'axe vertical des extrémités des brins.
La tresse miroir de



est :



Si on somme ces deux tresses, on obtient la tresse neutre :

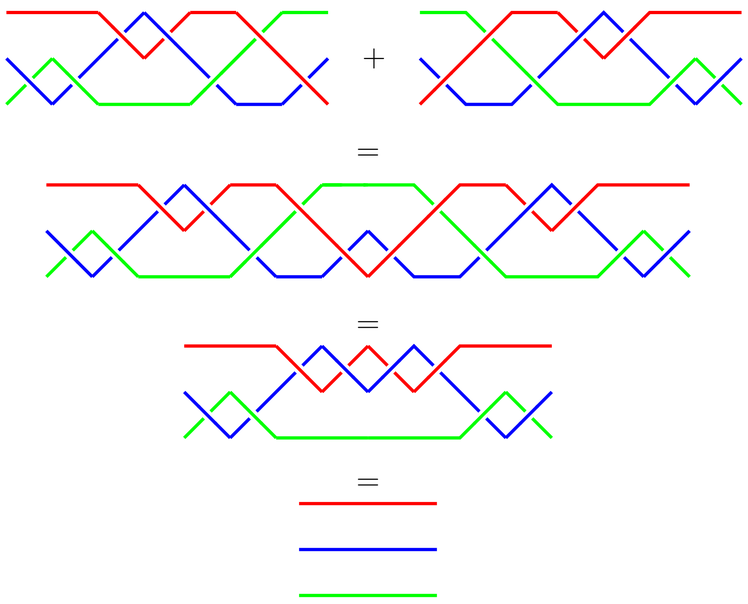
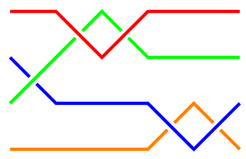


Diagramme de tresse

Il s'agit de commencer par "étendre" un peu la tresse afin qu'il n'y ait **jamais deux croisements simultanés**. par exemple, on reformule :

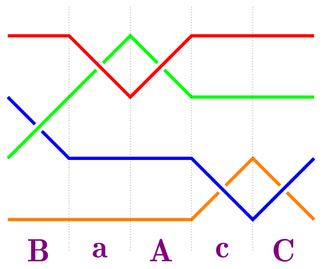
en :



Ensuite, à **chaque nouveau croisement**, on **numérote** les brins de haut en bas de 1 à n.
Puis :

- on écrira "a" lorsque le brin 1 passe par-dessus le brin 2 et "A" lorsque le brin 2 passe par-dessus de brin 1
- on écrira "b" lorsque le brin 2 passe par-dessus le brin 3 et "B" lorsque le brin 3 passe par-dessus de brin 2
- on écrira "c" lorsque le brin 3 passe par-dessus le brin 4 et "C" lorsque le brin 4 passe par-dessus de brin 3
- ...

On obtient ainsi un **codage** de tresse.



Codons de cette façon la tresse ① :

bAbAbAbAbAbA

Voyons ce qu'il en est pour la tresse ② :

bbaaaBAabABab

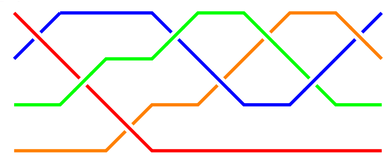
Et, enfin, pour la tresse ③ :

bbaaaBCABCABAb

Par ailleurs, on remarque que les codages **aA**, **Aa**, **bB**, **Bb** ... correspondent à des tresses neutres.
Si on simplifie dans le **mot de tresse** de ②, on obtient le nouveau codage :

bbaaBab

et cela correspond bien à ②.
Inversement, on peut représenter ainsi la tresse de codage **AbCaBAbA** :



Le codage de la tresse **miroir** est très facile à obtenir : **aBcBA** devient **abCbA**.

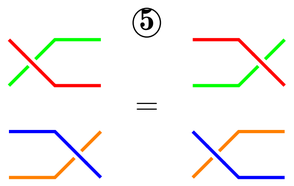
Ces tresses sont-elles égales ?

On considère deux tresses et on se pose la question de savoir si elles sont **égales**. Si les tresses ne sont pas trop longues ou ne font pas intervenir trop de brins, une approche visuelle peut suffire. Mais **comment faire pour des grandes tresses** ?

Le mathématicien Emil Artin (1898-1962, mathématicien **autrichien**) a énoncé et démontré le résultat suivant en **1925** :

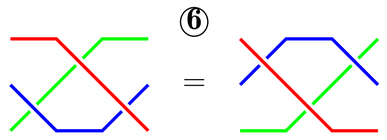
- Dans les mots de tresse :
  - les mots **aA**, **Aa**, **bB**, ... peuvent être simplifiés
  - si on considère deux lettres non voisines, comme par exemple a et c, on a : **ac=ca**, **AC=CA**, **aC=Ca**, **bd=db**,... (cela se voit bien sur ⑤)
  - si on considère deux lettres voisines, comme par exemple a et b, on a **aba=bab**, **cbc=bcb**,... (cela se voit bien sur ⑥)
- **Deux tresses sont égales si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre via les égalités précédentes.**

⑤



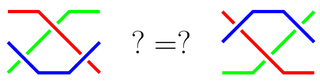
AC **CA**

⑥



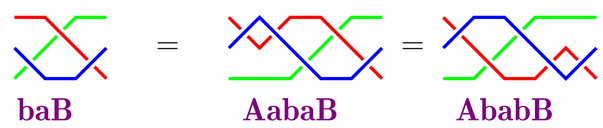
bab **aba**

On va montrer que les tresses suivantes sont isotopes :



baB **Aba**

On passe de l'une à l'autre ainsi :



baB **AabaB** **AbabB**

Aba