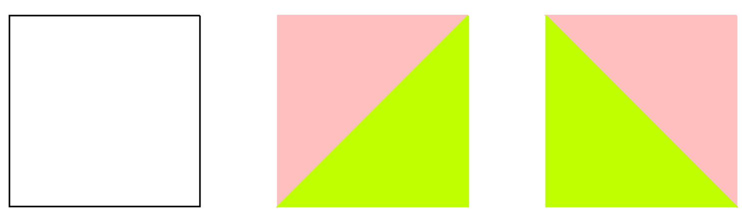
Triangulations et ... galerie d'art !

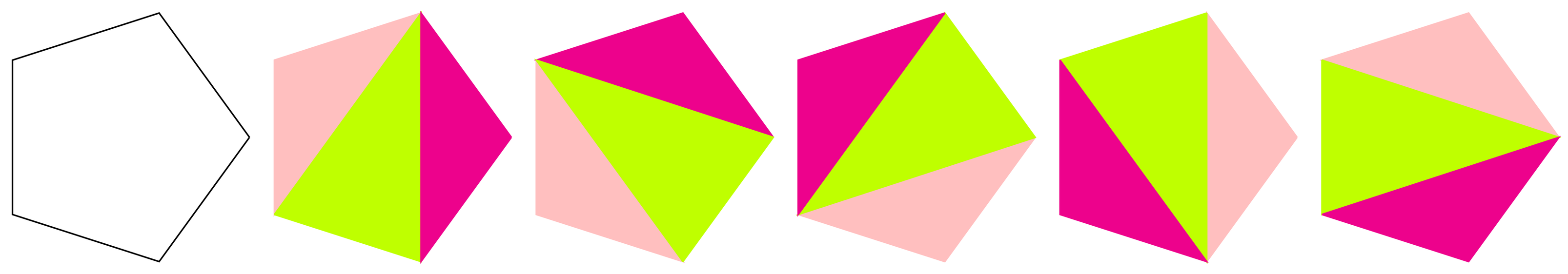
Triangulation d'un polygone

Partant d'un polygone convexe régulier, on cherche à le trianguler c'est-à-dire à le **partitionner en triangles** dont les sommets sont des **sommets du polygone**.

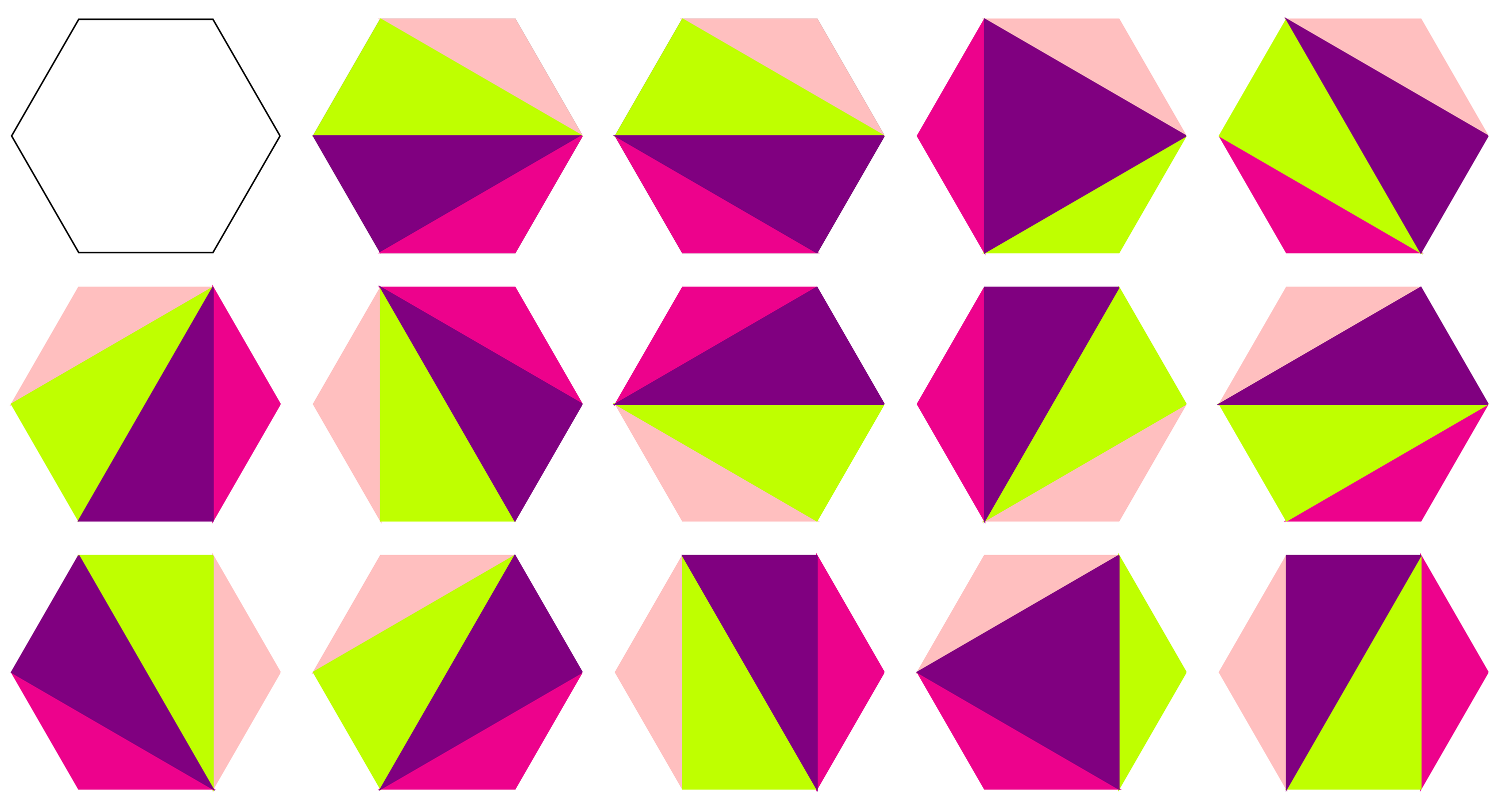
Pour le **carré**, 2 triangulations possibles :



Pour le **pentagone**, 5 triangulations possibles :



Pour l'**hexagone**, 14 triangulations possibles :



De façon générale, si on note T_n le nombre de triangulations possibles pour un polygone convexe à n côtés, on peut montrer qu'on a

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k}.$$

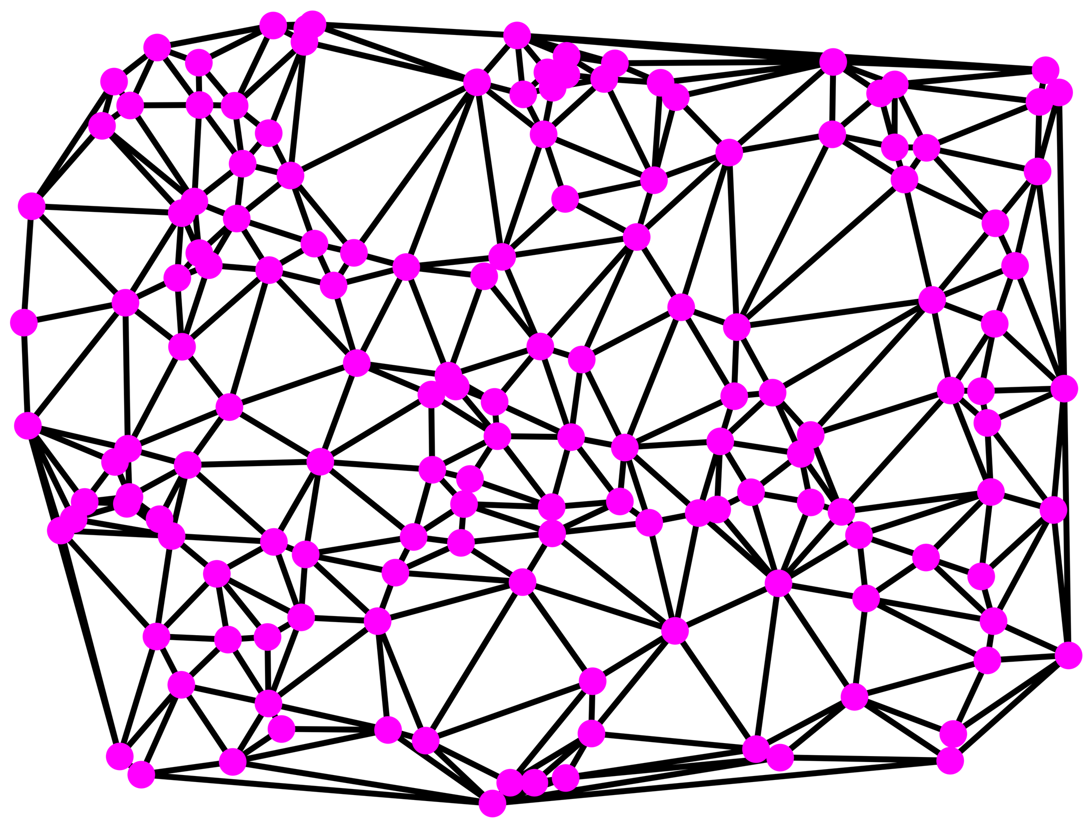
Et, pour $n \geq 4$, $T_n = C_{n-2}$ où les C_n sont les **nombres de Catalan**. Ils interviennent dans de nombreuses situations de dénombrement et sont référencés par l'**OEIS** sous le numéro **A000108**. On peut montrer que pour tout $n \geq 4$,

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

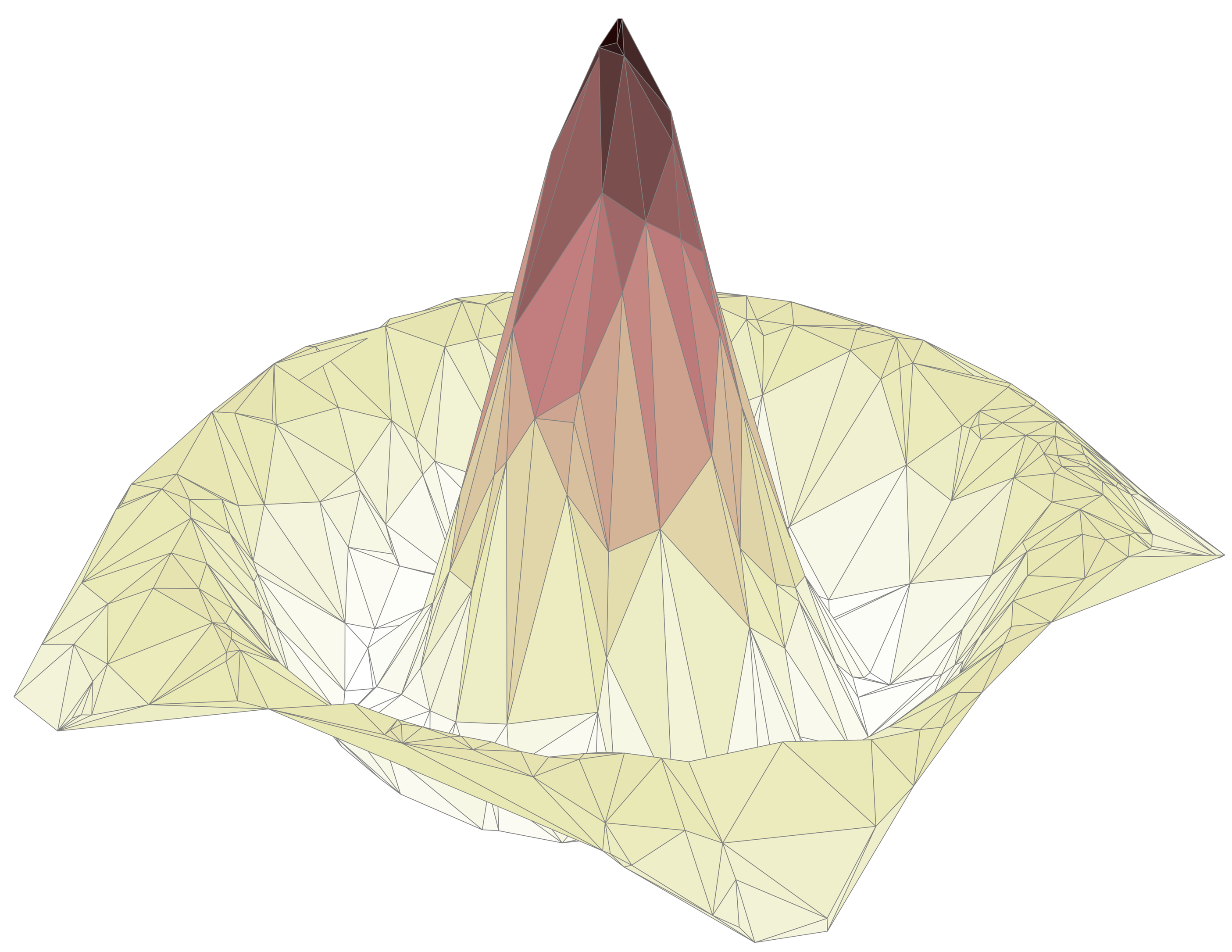
La triangulation est en fait possible dans "la plupart" des polygones (ceux qui sont appelés les **polygones simples** c'est-à-dire ceux dont deux arêtes non consécutives n'ont aucun point commun et où deux arêtes consécutives ont exactement un point commun).

Triangulation d'un nuage de points

Partant d'un nuage de points, il s'agit d'y construire des triangles tels que chacun de ces triangles ne contienne **aucun autre point du nuage**). Voici un exemple de triangulation d'une famille de point du plan :



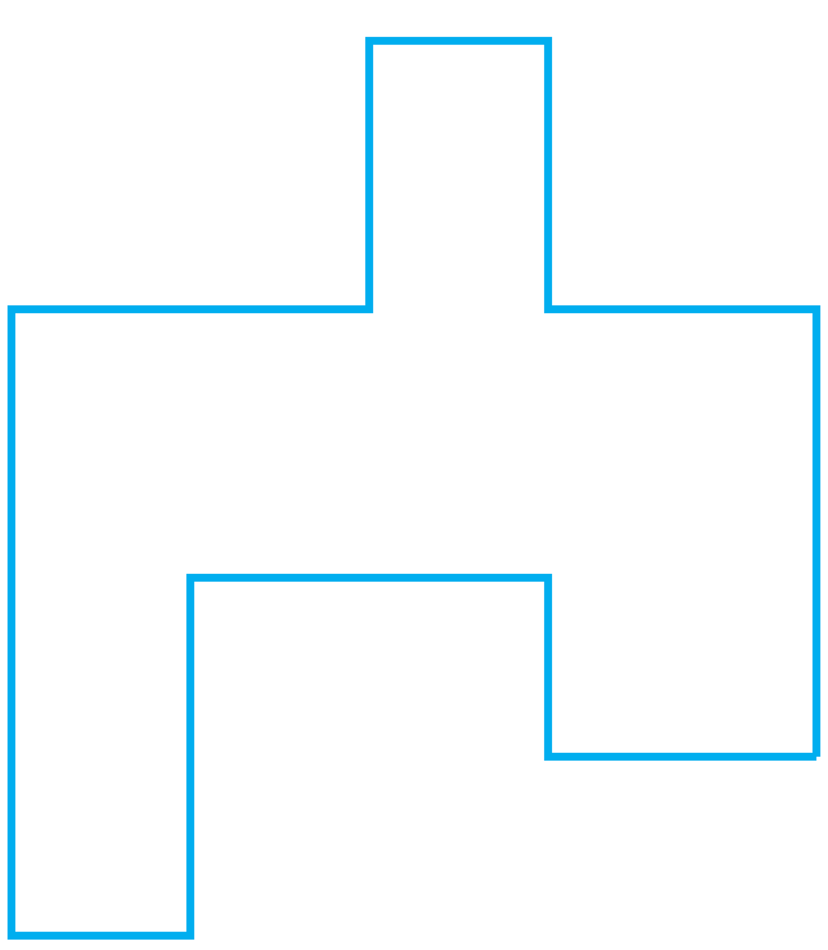
On peut faire de même une triangulation pour une famille de points de l'**espace**. Imaginons qu'on veuille modéliser une **montagne** pour laquelle on a les coordonnées GPS de certains points. Une triangulation permet alors de bien visualiser le **relief**.



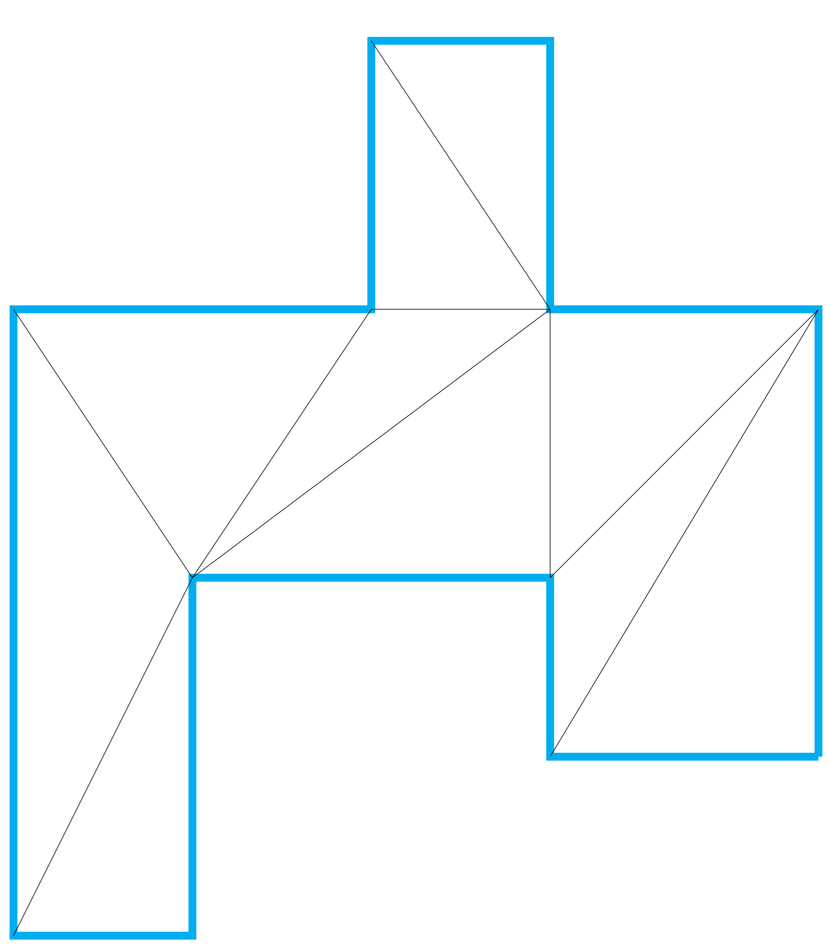
La galerie d'art

Une **galerie d'art**, dont les **contours forment un polygone** à n côtés, cherche à installer un **minimum de caméras de surveillance** permettant de couvrir la totalité de la galerie. On peut montrer que le nombre de caméras dont on a besoin pour cette surveillance est $\leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

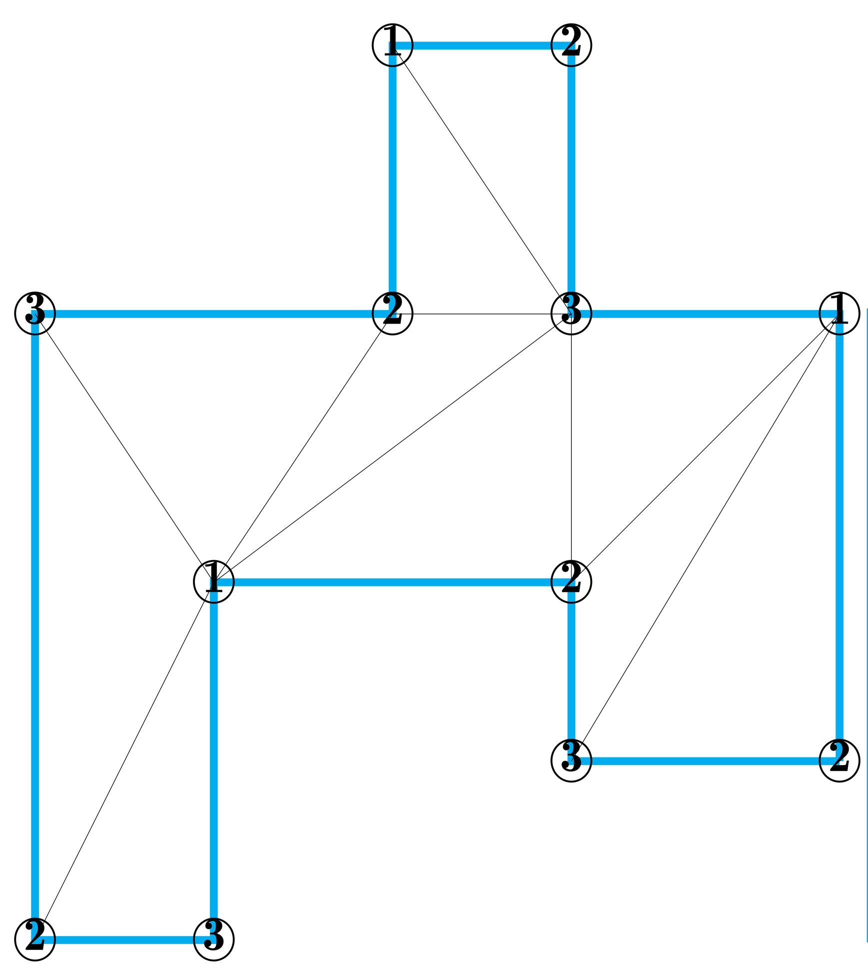
Partons donc d'un polygone simple à $n = 12$ côtés :



On commence par le trianguler :



On numérote ensuite les sommets des triangles avec ①, ② et ③ de telle sorte que dans chaque triangle, chacun de ces chiffres est utilisé une fois.



Il y a donc : 3 fois ①, 5 fois ② et 4 fois ③. Si on place 3 caméras au niveau des ①, tous les triangles seront couverts par la caméra et ainsi, toute la galerie le sera aussi.